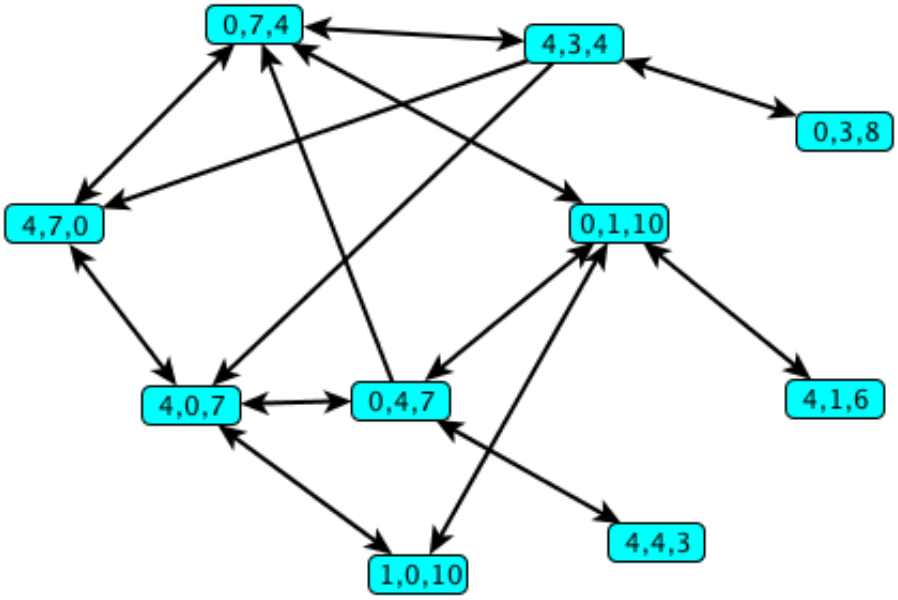
Progettazione di Algoritmi - lezione 2

Discussione dell'esercizio [acqua]

Come nel caso del problema del 9-puzzle, anche per l'esercizio [acqua] si tratta di trovare un grafo che permetta di modellare il problema. Nel caso del 9-puzzle i nodi del grafo sono tutte le possibili configurazioni (anche quelle non raggiungibili tramite le mosse permesse) e c'è un arco tra un nodo *u* e un altro nodo *v* solo se con una mossa si può passare da *u* a *v*. Così per risolvere il problema basta trovare un cammino dal nodo *w*, che rappresenta la configurazione mescolata, al nodo della configurazione iniziale. Vedremo tra poco un algoritmo generale che trova, se esiste, un cammino tra una qualsiasi coppia di nodi.

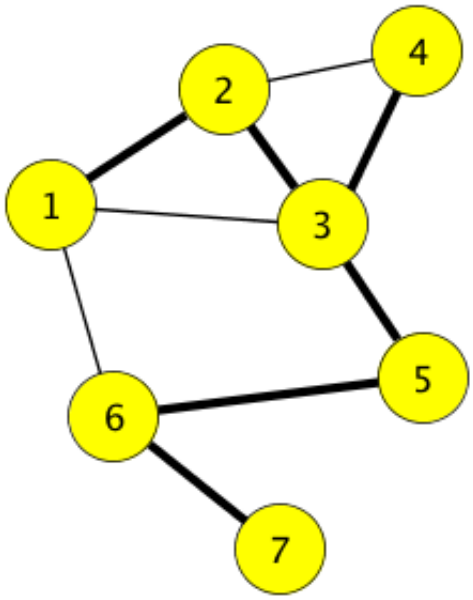
Per l'esercizio [acqua] le configurazioni sono i possibili stati di riempimento dei tre contenitori. Ogni nodo rappresenta una configurazione (*a*, *b*, *c*) dove *a* è il numero di litri d'acqua nel contenitore da 4, *b* il numero di litri nel contenitore da 7 e *c* il numero di litri in quello da 10. Siccome un contenitore con capienza *z* può contenere 0,1,2,.., *z* litri d'acqua, esso può assumere *z* + 1 stati diversi. Quindi, il numero dei nodi è 5x8x11 = 440 (questi comprendono anche nodi che dalla configurazione iniziale non possono essere raggiunti). C'è un arco tra due nodi *u* e *v* se tramite un versamento permesso si passa da *u* a *v*. La figura qui sotto mostra un frammento del grafo.

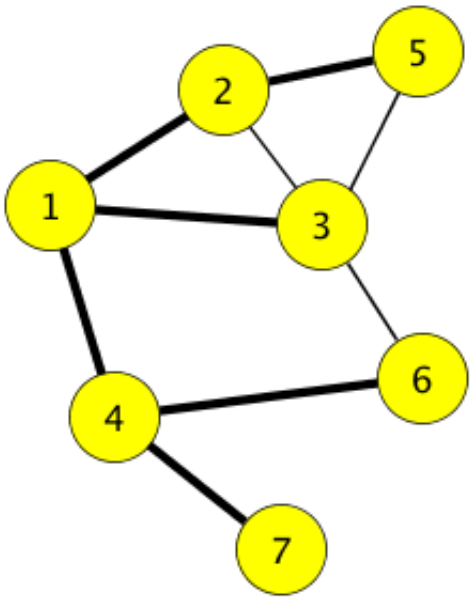


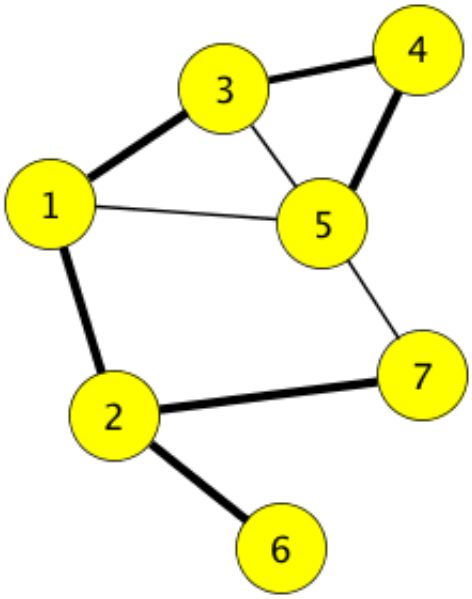
La soluzione del problema si riduce così a trovare un cammino dal nodo (4, 7, 0) a un nodo del tipo (2, *b*, *c*) o (*a*, 2, *c*).

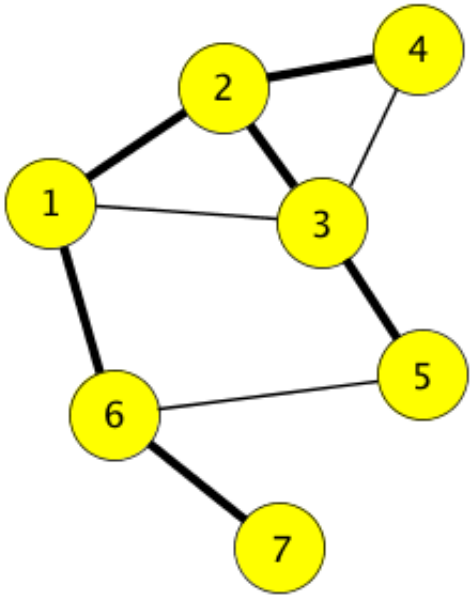
Visita di un grafo (DFS)

Per **visita di un grafo** si intende una procedura che partendo da un nodo *u* visita tutti i nodi e gli archi raggiungibili da *u* e ad ogni passo visita nuovi nodi o archi solamente se direttamente connessi a nodi o archi già visitati. Un nodo o arco è *raggiungibile* da *u* se esiste un cammino che da *u* arriva al nodo o arco. Ovviamente, ci sono tantissimi modi di visitare un grafo. Nella figura qui sotto sono mostrate quattro visite dello stesso grafo a partire dal nodo 1, i nodi sono numerati in ordine di visita e gli archi che hanno permesso di scoprire nuovi nodi sono marcati.







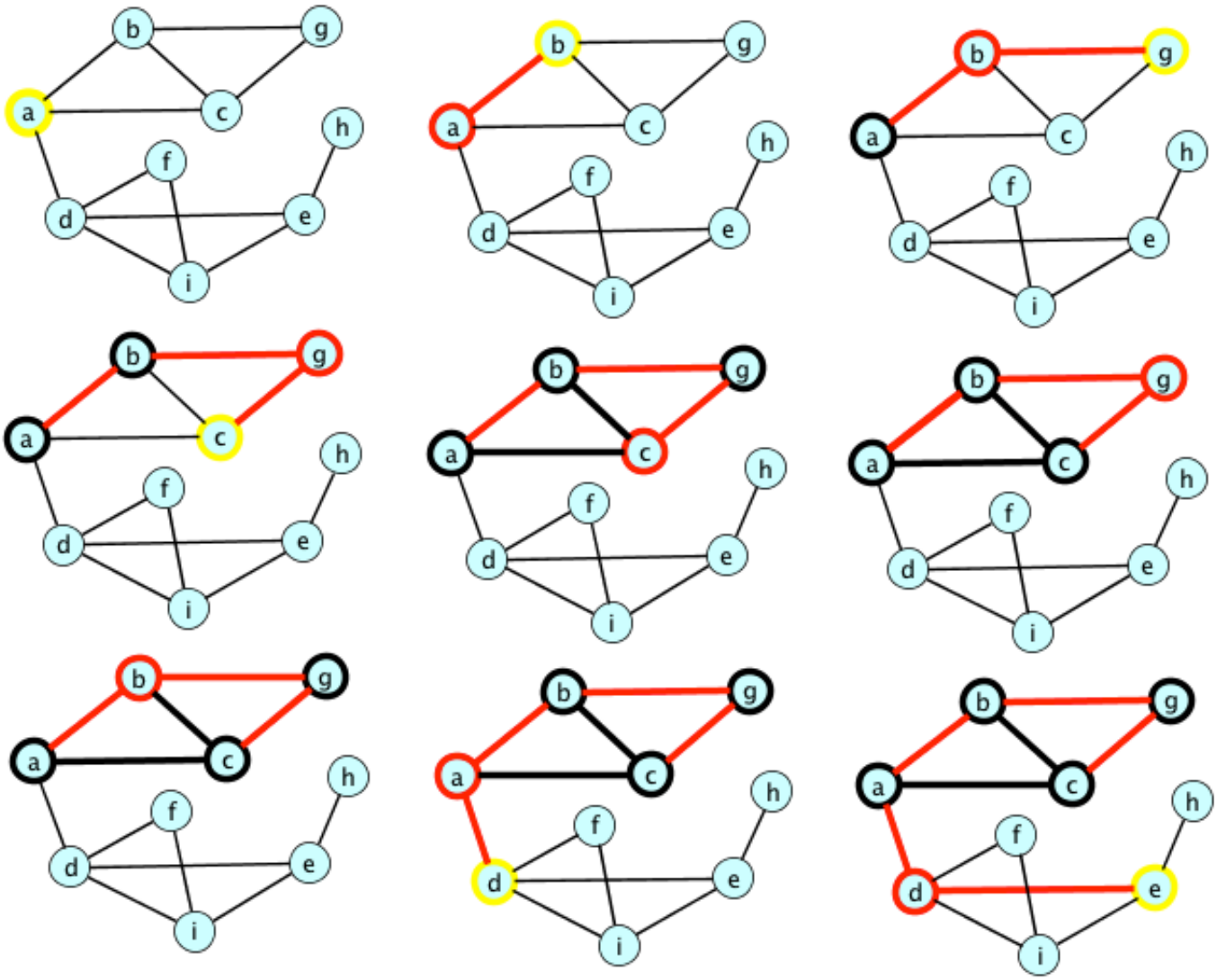


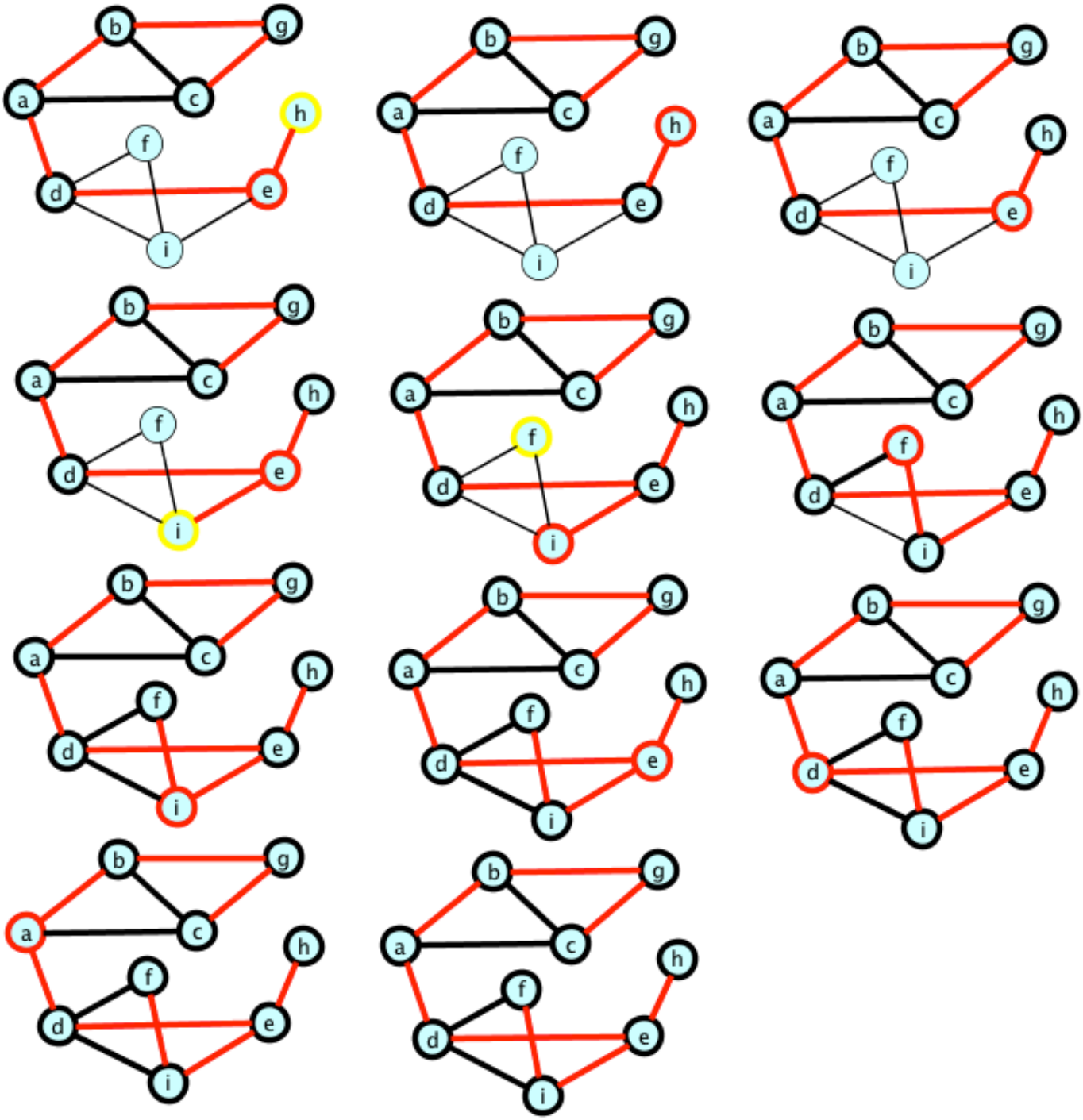
Due procedure per visitare un grafo sono particolarmente importanti per la loro semplicità e per le proprietà che hanno. La prima che vedremo si chiama **visita in profondità** (in inglese *Depth First Search*, abbreviato DFS). La DFS è simile alla procedura che si potrebbe seguire per esplorare un labirinto. Partendo dall'entrata del labirinto prendiamo uno dei corridoi e quando arriviamo ad un bivio prendiamo uno dei corridoi disponibili e così via. Però dobbiamo stare attenti a non girare in circolo e quindi a non percorrere un corridoio che abbiamo già attraversato come se fosse nuovo. Quello che ci occorre è un gesso per marcare i bivi, cioè i nodi del grafo, che abbiamo già visitato. Ma questo non basta, dobbiamo anche ricordarci i corridoi che dall'entrata ci hanno portato al punto in cui ci troviamo. Senza questa memoria potremmo non riuscire a esplorare l'intero labirinto perchè tutti i bivi già visitati sarebbero indistinguibili e non sapremmo quali fra questi potrebbero avere corridoi che portano verso bivi inesplorati.

Generalizzando la procedura per un grafo qualsiasi, dobbiamo mantenere durante la visita sia l'insieme dei nodi finora visitati che il cammino dal nodo di partenza al nodo in cui ci troviamo. Per mantenere il cammino possiamo usare una pila (o stack) perchè quando ci troviamo in un nodo in cui tutti gli archi incidenti sono stati attraversati (ovvero tutti gli adiacenti sono stati visitati) dobbiamo tornare al nodo precedente del cammino che equivale a un'operazione di *pop* della pila. Quando invece attraversiamo un arco che porta ad un nuovo nodo aggiungiamo quest'ultimo al cammino, cioè effettuiamo un'operazione di *push* sulla pila.

```
DFS(G: grafo, u: nodo di partenza)
    VIS <- insieme dei nodi visitati, inizialmente vuoto
    S <- stack, inizialmente vuoto
    S.push(u)
    VIS.add(u)
    WHILE S not empty DO
        v <- S.top()      /* Legge il nodo in cima allo stack */
        IF esiste un adiacente w di v con w non in VIS THEN
            VIS.add(w)
            S.push(w)     /* Inserisce w in cima allo stack */
        ELSE
            S.pop()       /* Rimuove il nodo in cima allo stack */
    RETURN VIS
```

Al termine della visita `VIS` contiene l'insieme dei nodi visitati. Nella figura qui sotto, sono mostrati i passi della DFS (da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso). Ogni passo corrisponde ad una iterazione del `WHILE` : il nodo appena estratto dallo stack è in rosso, il nuovo nodo visitato è in giallo (i nodi già visitati sono marcati in nero), gli archi che hanno portato a scoprire nuovi nodi sono in rosso (gli archi attraversati sono marcati in nero).





Se il grafo è diretto la DFS attraversa gli archi seguendo la loro orientazione.

Correttezza ed efficienza della DFS

Vogliamo dimostrare che la DFS partendo da un nodo u visita tutti i nodi raggiungibili da u. Infatti, supponiamo per assurdo che esista un nodo z raggiungibile da u ma che la DFS non visita. Siccome z è raggiungibile da u, esiste un cammino $u_0, u_1, \ldots, u_k$ (se il grafo è diretto, il cammino è orientato) con $u_0 = u$ e $u_k = z$. Sia u_i il primo nodo del cammino che non è stato visitato, chiaramente $0 < i \leq k$. Allora, u_{i-1} è stato visitato e durante la visita prima che il nodo u_{i-1} sia estratto dallo stack tutti gli adiacenti di u_{i-1} devono essere stati visitati. Siccome u_i è adiacente a u_{i-1}, il nodo u_i deve essere stato visitato in contraddizione con la nostra ipotesi per assurdo.

Quindi, se il grafo non è diretto, la DFS visita esattamente tutti i nodi della componente connessa del nodo di partenza. Se il grafo è diretto, la DFS visita tutti i nodi raggiungibili da u tramite cammini orientati che, in generale, sono un soprainsieme della componente fortemente connessa di u.

Ma quanto è efficiente la DFS? Per valutare la complessità della DFS dobbiamo precisare alcuni dettagli implementativi. Per mantenere l'insieme dei nodi visitati possiamo usare un semplice array `VIS` booleano con un

elemento per ogni nodo, inizializzato a `false` e ogni volta che un nuovo `w` viene visitato si pone `VIS[w] = true`. Così l'aggiornamento e il test relativo alla visita di un nodo costa tempo costante. Lo stack può essere facilmente implementato in modo che tutte le operazioni `push`, `top` e `pop` abbiano costo costante. Inoltre se il grafo è rappresentato tramite liste di adiacenza, la scansione degli adiacenti prende tempo costante per ogni adiacente considerato. Ad ogni iterazione del `WHILE` o viene visitato un nuovo nodo o è estratto un nodo dallo stack. Siccome ogni nodo è inserito nello stack una sola volta (quando viene visitato), il numero di iterazioni del `WHILE` è al più 2*n*. Il numero di operazioni non costanti in una iterazione del `WHILE` sono solamente le scansioni degli adiacenti o in altri termini gli attraversamenti degli archi. Ogni arco è attraversato al più due volte (per grafi diretti una sola volta). Quindi gli attraversamenti degli archi costano complessivamente O(*m*)[1]. In totale, la complessità della DFS su un grafo connesso è O(*n* + *m*). In generale, la complessità è O(*h* + *k*) dove *h* è il numero di nodi e *k* il numero di archi della componente connessa del nodo di partenza. Perciò la DFS ha complessità ottimale perchè qualsiasi procedura di visita deve necessariamente visitare tutti i nodi e gli archi che sono raggiungibili.

Versione ricorsiva

La DFS si presta ad essere implementata in modo ricorsivo. Infatti, ogni volta che visita un nuovo nodo *w* inizia una DFS a partire da *w*.

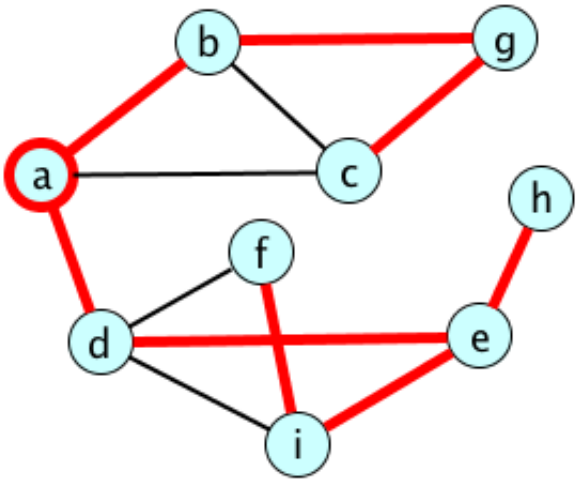
```
VIS <- array booleano, inizializzato a false

DFSR(G: grafo, v: nodo, VIS: array booleano)
    VIS[v] <- true
    FOR ogni w adiacente di v DO
        IF NOT VIS[w] THEN
            DFSR(G, w, VIS)
```

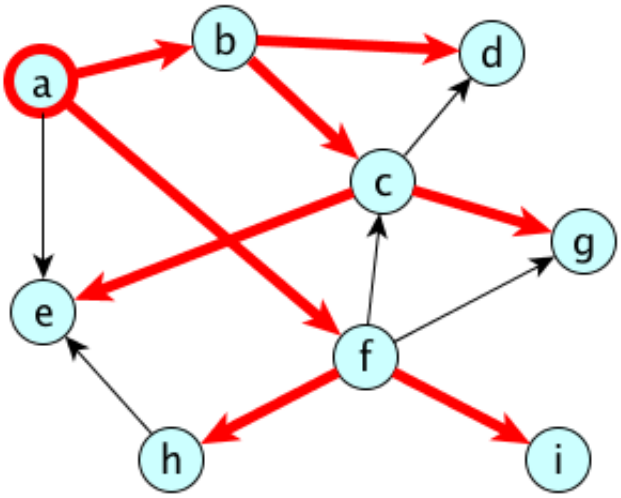
Nella versione ricorsiva lo stack è gestito implicitamente proprio dalla ricorsione. Il prezzo di questa semplicità è che, siccome lo stack delle chiamate ricorsive ha tipicamente una dimensione limitata, l'implementazione ricorsiva non è adatta per grafi di grandi dimensioni.

Albero di visita

La visita di un grafo determina un **albero di visita** che è il sottografo formato da tutti i nodi visitati assieme agli archi che hanno permesso di visitarli. Nella teoria dei grafi, per **albero** si intende un grafo connesso e aciclico (cioè, senza cicli). Si può dimostrare che un grafo non diretto di *n* nodi è un albero se e solo se è connesso e ha esattamente *n* - 1 archi. Si può anche dire che un albero è un grafo minimamente connesso, nel senso che ha il numero minimo di archi per renderlo connesso o, equivalentemente, che nessun arco può essere eliminato senza sconnettere il grafo.

Gli alberi di visita dipendono dall'ordine con cui i nodi e gli archi vengono visitati. La DFS produce alberi di visita che hanno particolari proprietà che come avremo modo di vedere risultano molto utili per risolvere efficientemente alcuni problemi fondamentali. Ecco qui sotto gli alberi della DFS su due grafi (a partire dai nodi in rosso), uno non diretto e l'altro diretto (gli archi degli alberi sono in rosso):





L'albero della DFS è anche determinato dall'ordine con cui sono scanditi gli adiacenti dei nodi visitati. Il nodo di partenza della visita fa sì che gli alberi di visita hanno una radice e quindi restano determinate anche le foglie che sono i nodi *z* dell'albero per cui il cammino dalla radice non può essere esteso. Nel caso di grafi diretti l'albero di visita è più propriamente chiamato **arborescenza** per indicare che è un grafo diretto. Se trascuriamo le orientazioni degli archi è un albero e gli archi hanno un'orientazione determinata dal nodo radice, cioè sono tutti orientati dalla radice verso le foglie. Le foglie sono esattamente quei nodi dell'arborescenza che non hanno archi uscenti (nell'arborescenza).

Determinazione delle componenti connesse

Qualsiasi procedura di visita permette di determinare le componenti connesse di un grafo. Infatti, basterà fare una visita a partire da un nodo, questa determinerà la componente connessa del nodo, e poi scegliere, se esiste, un nodo non visitato e fare una visita da quest'ultimo determinando un'altra componente connessa e così via finché tutti i nodi del grafo sono stati visitati. Per tenere traccia delle componenti connesse si può usare un array che ad ogni nodo assegna l'indice della sua componente connessa (gli indici sono determinati dall'ordine con cui sono trovate le componenti):

```
CC(G: grafo)
    cc <- array di n elementi, inizializzato a 0
    nc <- 0
    FOR ogni nodo u di G DO
        IF cc[u] = 0 THEN
            nc <- nc + 1
            DFSCC(G, u, cc, nc)    /* Visita una nuova componente connessa */
RETURN cc

DFSCC(G: grafo, u: nodo, cc: array, nc: intero)
    cc[u] <- nc    /* Marca u come appartenente alla componente connessa di indice nc */
    FOR ogni w adiacente di v DO
        IF cc[w] = 0 THEN
            DFSCC(G, w, cc, nc)
```

Quindi `CC(G)` ritorna un array che per ogni nodo di `G` dà l'indice della sua componente connessa. Per grafi non diretti ciò è corretto ed è anche efficiente in quanto la complessità è ancora una volta O($n + m$). Per grafi diretti l'algoritmo non determina in generale le componenti fortemente connesse. Come vedremo è necessaria una procedura di visita più raffinata per determinare in modo efficiente le componenti fortemente connesse.

Esempio [2-colorazione, bipartizione]

Consideriamo il seguente problema. Dobbiamo preparare il calendario degli esami per un corso di laurea. Conosciamo per ognuno dei *k* studenti quali tra gli *n* esami vuole sostenere. Ci sono solamente due settimane a disposizione e ognuno degli *n* esami deve essere messo in una sola delle due settimane. Vogliamo, se possibile, trovare un calendario che eviti che qualche studente debba sostenere due o più esami nella stessa settimana. Come possiamo risolvere il problema?

L'idea è di modellare il problema con un opportuno grafo. Quello che dobbiamo rappresentare tramite il grafo sono i possibili conflitti tra coppie di esami dovuti a studenti che vogliono sostenere entrambi gli esami. Consideriamo quindi un grafo (non diretto) i cui nodi sono gli esami e tra due esami *u* e *v* mettiamo un arco se c'è almeno uno studente che vuole sostenere sia *u* che *v*. Così una soluzione del problema può essere formulata come l'assegnazione ad ogni nodo-esame di una delle due settimane in modo che due qualsiasi nodi connessi da un arco devono avere assegnate settimane diverse. Questo è un caso particolare di un problema di *colorazione di un grafo*. In generale, dato un grafo si vogliono colorare i nodi usando il numero minimo di colori che garantiscono che due qualsiasi nodi adiacenti hanno colori diversi. Per il nostro problema i colori sono le settimane e quindi sono solamente due. Quindi vogliano sapere se esiste e in tal caso trovare una cosidetta *2-colorazione* del nostro grafo. Un altro modo di vedere il problema è di vedere l'assegnamento dei due colori ai nodi come la partizione del grafo in due insiemi (disgiunti) tali che non ci sono archi tra nodi appartenenti alla stessa parte. Un grafo che può essere così partizionato si dice *bipartito*.

Per determinare se un grafo è 2-colorabile (o equivalentemente se è bipartito) ed in tal caso trovare la 2-colorazione, si può usare una qualsiasi procedura di visita. È sufficiente mantenere un array i cui elementi, corrispondenti ai nodi del grafo, sono inizializzati col valore 0 (indefinito), eccetto per il nodo di partenza della visita a cui è assegnato il colore 1. Ogni volta che un nuovo nodo *w* è visitato gli viene assegnato il colore differente a quello assegnato al nodo *v* che ha portato a visitare *w*, e infine ogni volta che si attraversa un arco che arriva in un nodo già visitato si controlla che abbia colore diverso da quello del nodo di partenza dell'arco. Se tutti i controlli sugli archi attraversati dalla visita sono soddisfatti la colorazione ottenuta è una 2-colorazione. Infatti, tutti gli archi sono stati atttraversati e sia che essi abbiano portato a visitare nuovi nodi o a toccare nodi già visitati i colori dei nodi incidenti è sempre diverso. Se invece un controllo fallisce, il grafo non è 2-colorabile. La ragione sta nel fatto che l'assegnazione dei colori ai nodi effettuata durante la visita è sempre obbligata (eccetto quella del primo nodo).

Il seguente algoritmo usa la DFS per cercare di 2-colorare un grafo non diretto. Per semplicità assumiamo che il grafo sia connesso:

```
TWOCOL(G:grafo non diretto)
    col <- array, inizializzato a 0
    col[u] <- 1
    IF NOT DFS2C(G, u, col) THEN
        RETURN NULL
RETURN col

DFS2C(G: grafo non diretto, u:nodo, col:array)
    FOR ogni adiacente w di u DO
        IF col[w] = col[u] THEN
            RETURN FALSE
        ELSE IF col[w] = 0 THEN
            col[w] <- (2 IF col[u] = 1 ELSE 1)
            IF NOT DFS2C(G, w, col) THEN
                RETURN FALSE
    RETURN TRUE
```

Usando la DFS si può risolvere il problema della 2-colorazione (o bipartizione) in modo molto efficiente, cioè, in tempo $O(n + m)$.

In generale, il problema della colorazione è molto più difficile. Determinare se un grafo è 3-colorabile è già un problema per cui non si conoscono algoritmi efficienti. Gli algoritmi migliori hanno complessità esponenziale nella dimensione del grafo.

Esercizio [ordine]

Gli ingegneri che progettano una fabbrica di automobili hanno suddiviso il processo di produzione delle automobili in *n* lavorazioni. Alcune di queste possono essere effettuate in parallelo (ad es. l'assemblaggio del motore e la saldatura della scocca), ma altre necessitano prima di poter essere iniziate che altre lavorazioni siano state ultimate (ad es. non si può montare la carrozzeria prima di aver preparato il telaio). Per ogni lavorazione *L*, gli ingegneri hanno specificato una lista (eventualmente vuota) di lavorazioni che devono essere ultimate prima che *L* possa essere iniziata. Vogliamo sapere se le specifiche date sono fattibili, cioè, esiste almeno un ordine di esecuzione delle lavorazioni che rispetta i vincoli dati dalle liste? E poi, se è così, come possiamo trovare un tale ordine?

---

1. Per ottenere tale efficienza bisogna mantenere nello stack, insieme ad ogni nodo *v*, anche un indice della posizione del prossimo adiacente di *v* da scandire. In questo modo, quando un nodo è letto dalla cima dello stack la scansione dei suoi adiacenti non riparte daccapo ma continua dal primo non ancora esaminato. Chiaramente l'indice va aggiornato ogni volta che la condizione dell' `IF` è soddisfatta.↩