Compito A

Esercizio 1
Data la seguente tabella di verità ricavare la forma canonica congiuntiva e disgiuntiva. Ricavare poi la EB minima usando le mappe di Karnaugh.

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Esercizio 2: controllare l'identità delle seguenti due funzioni di 4 variabili :

$$y = x_1x_3 + \overline{x}_2\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_4$$

$$y = x_1x_3 + \overline{x}_2\overline{x}_4 + x_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$$

Esercizio 3: si trovi la minima FND (forma normale disgiuntiva) per la funzione seguente (- indica la condizione di indifferenza)

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	-
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	-

Esercizio 4: Data la stringa binaria A=11001 si fornisca la corrispondente stringa decimale per i seguenti casi:

A è espresso in complemento a due
A è un intero con segno
A è un intero positivo
A è un numero positivo in virgola fissa, con due bit per la parte frazionaria

Esercizio 5: **(10 punti)**
Progettare un circuito che riceve in ingresso la codifica binaria di un valore x, con $0 \leq x \leq 7$, e fornisce in uscita la codifica binaria della somma aritmetica tra x e il suo precedente (il precedente del valore 0 è 7).

Compito B

Esercizio 1 (4 punti)
Utilizzando le porte logiche elementari, realizzare la seguente funzione:

$$y = x_1 x_3 + \overline{x}_2 \overline{x}_4 + x_2 x_3 x_4 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_2 x_4 + \overline{x}_1 x_2 x_4$$

sia nel caso di porte logiche aventi solo 2 ingressi che nel caso di porte logiche con 4 ingressi.

Esercizio 2 (6 punti)
Dato il seguente insieme di simboli:

$$y = \{pippo, paperino, pluto, topolino, qui, quo, qua, ZioPaperone, NonnaPapera, BandaBassotti\}$$

codificarlo utilizzando stringhe di bit a lunghezza fissa. Progettare un circuito che riceva in ingresso la codifica di questo insieme di simboli e produca in uscita 10 bit, tali per cui uno solo sia pari ad uno e tutti gli altri uguali a zero. Ad esempio, se input=pippo, output =0000000001.
NOTA: non avete bisogno di scrivere 10 mappe di karnaugh!!!

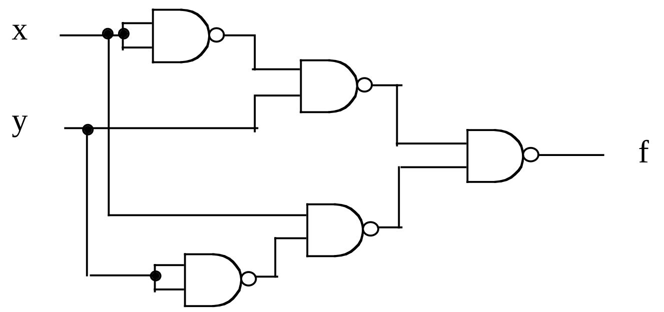
Esercizio 3 (10 punti)
Si progetti un circuito per calcolare la funzione di primalità[1] per interi di 4 bit in complemento a 2, cioè la funzione

$$f: \{0,1\}^4 \longrightarrow \{0,1\}$$

t.c. $f(x, y, z, t) = 1$ sse $xyzt_2$ (cioè il numero binario in complemento a 2 ottenuto concatenando i quattro input) è primo.

Esercizio 4 (5 punti)
Convertire in base 5 con rappresentazione in virgola fissa il numero decimale 214,1362 avendo a disposizione 5 cifre per la parte intera e 6 per la parte decimale. La rappresentazione ottenuta precisa o un approssimazione del numero decimale di partenza?

Esercizio 5 (5 punti)
Analizzare il seguente circuito, ricavando la EB minima in FND.



[1] **<u>Def.:</u>** dati due interi p e q, si dice che <u>p divisibile per q</u> se p DIV q un numero intero.
<u>Def.:</u> un numero intero z si dice <u>primo</u> se $z \neq 1, —1$ e z divisibile solo per 1, —1, z —z0 NON primo

Soluzione compito A

Esercizio 1

x2x1x0	y03	y2	y1	y0
000	0	1	1	1
001	0	0	0	1
010	0	0	1	1
011	0	1	0	1
100	1	1	1	1
101	1	0	0	1
110	1	0	1	1
111	1	1	0	1

Esercizio 3

La mappa di K. è

x \ *y z*	00	01	11	10
0	*1*	*0*	*0*	*1*
1	-	*0*	-	*1*

da cui $E_{min} = \bar{z}$

Soluzioni compito B

Esercizio 3

x	*y*	*z*	*t*	DEC	*f*
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	2	1
0	0	1	1	3	1
0	1	0	0	4	0
0	1	0	1	5	1
0	1	1	0	6	0
0	1	1	1	7	1
1	0	0	0	-8	0
1	0	0	1	–7	1
1	0	1	0	–6	0
1	0	1	1	–5	1
1	1	0	0	–4	0

1	1	0	1		–3	1
1	1	1	0		–2	1
1	1	1	1		–1	0

la cui mappa di K. è

x y \ *z t*	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	1	0

da cui $E_{min} = \bar{x}\cdot \bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot y\cdot t + x\cdot \bar{z}\cdot t + x\cdot \bar{y}\cdot t + x\cdot y\cdot z\cdot \bar{t}$

Fattorizzando si ottiene $E_{min}' = z\cdot (\bar{x}\cdot \bar{y} + x\cdot y\cdot \bar{t}) + t\cdot ((x \ \boldsymbol{XOR}\ y) + x\cdot \bar{z})$

che è realizzabile con un circuito combinatorio di 14 porte.

Esercizio 4

Conversione della parte intera:

- 214 : 5 = 42 con resto 4
- 42 : 5 = 8 con resto 2
- 8 : 5 = 1 con resto 3
- 1 : 5 = 0 con resto 1

Conversione della parte frazionaria:

- 0,1362 × 5 = 0,681
- 0,681 × 5 = 3,405
- 0,405 × 5 = 2,025
- 0,025 × 5 = 0,125
- 0,125 × 5 = 0,625
- 0,625 × 5 = 3,125

Pertanto la rappresentazione in base 5 è 01324,032003. Non è esatta perché la conversione della parte frazionaria è stata interrotta al 6° passo (come richiesto dalla rappresentazione), mentre la codifica esatta richiedeva più cifre (N.B.: il numero è addirittura periodico!)

Esercizio 5

$$\overline{\overline{(\overline{(x\ x)}\ y)}\ \overline{(x\ \overline{(y\ y)})}} = \overline{\overline{(\bar{x}\ y)}\overline{(x\ \bar{y})}} = \bar{x}\ y + x\ \bar{y}$$

Compito C

Esercizio 1 (5 punti): Ricavare la tabella di verità a partire dalla seguente EB:

$$\overline{x}y\overline{z} + xyz + xy\overline{z} + \overline{y}$$

Ricavare poi la EB minima usando le mappe di Karnaugh.

Esercizio 2 (5 punti): Convertire in base 16 il seguente numero in base 3: 1110211. Rappresentare quindi il numero in base 2 senza utilizzare nuovamente il metodo delle divisioni.

Esercizio 3 (5 punti): si trovi la minima FNC (forma normale congiuntiva) per la funzione seguente (- indica la condizione di indifferenza)

x	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	-
1	0	1	-
1	1	0	0
1	1	1	0

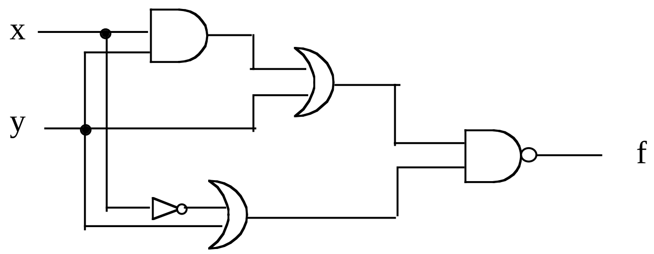
Esercizio 4 (5 punti): Tradurre la seguente EB in un'altra espressione che faccia uso esclusivamente dell'operatore NOR:

$$(x \cdot y) + z$$

Esercizio 5: **(10 punti)**
Progettare un circuito che calcoli la conversione di numeri da complemento al segno a complemento a due. La funzione accetta in input solo numeri interi compresi tra -7 e 7.

Compito D

Esercizio 1 (5 punti): Analizzare il seguente circuito e ricavarne l’espressione booleana minima in FND (forma normale disgiuntiva):



Esercizio 2 (5 punti): Rappresentare in base due e virgola fissa il numero decimale 125,512 avendo a disposizione 7 cifre per la parte intera e 6 per la parte decimale. La rappresentazione ottenuta precisa o un approssimazione del numero decimale di partenza?

Esercizio 3 (5 punti): Mostrare, facendo uso degli assiomi dell’algebra booleana, la validità della seguente identità:

$$xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x} + x\bar{z} = \bar{z} + \bar{x}$$

Esercizio 4: **(10 punti)**
Progettare un circuito che, dati in ingresso due numeri interi in complemento a due *a* e *b* tali che -2 ≤ a,b ≤ 1, emetta in uscita 1 se a ≤ b e 0 altrimenti.

Esercizio 5 (5 punti): Tradurre la seguente EB in un’altra espressione che faccia uso esclusivamente dell’operatore NAND:

$$x + \bar{y} + \bar{z}$$

Soluzione Compito C

Esercizio 1

x	*y*	*z*	*EB*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

la cui mappa di K. è

x \ *y z*	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

da cui $E_{min} = \overline{y} + x + \overline{z}$

Esercizio 2

$1110211_3 = 1 \times 3^6 + 1 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 729+243+81+2x9+3+1=1075_{10}$
1075 : 16 = 67 con resto 3
67 : 16 = 4 con resto 3
4 : 16 = 0 con resto 4

Per cui: $1075_{10}=433_{16}$

Che si può facilmente convertire cifra per cifra in binario: $4_{16} = 0100_2$, $3_{16} = 0011_2$, da cui:

$433_{16}=0100\ 0011\ 0011_2$

Esercizio 3

Osserviamo che $FNC(f) = \overline{FND(\overline{f})}$.
La mappa di K. della $\overline{f}$ è:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	-	-	1	1

da cui $FND(\overline{f}) = \overline{y} + x$
per cui $FNC(f) = \overline{\overline{y} + x} = \overline{x}y$

(alternativamente si poteva lavorare direttamente sugli 0 della mappa di K. e ottenere dagli implicanti i maxtermini della forma normale congiuntiva).

Esercizio 4

$(x \cdot y) + z = NOR(NOR(x \cdot y, z), NOR(x \cdot y, z)) =$
$NOR(NOR(EB1, z)), NOR(EB2, z))$
$EB1 = x \cdot y = NOR(NOR(x, y), NOR(x, y))$

Esercizio 5

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

Per due uscite, y_2 e y_3, calcoliamo le mappe di Karnaugh:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	0
10	0	1	1	1

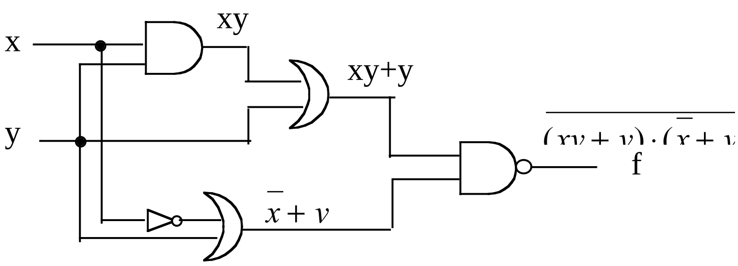
$$y_2 = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

$$y_3 = \overline{x_1}x_3 + x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_3}x_4$$

Soluzione Compito D

Esercizio 1



f = $\overline{(xy+y)\cdot(\overline{x}+y)} = \overline{y} + \overline{(\overline{x}+y)} = \overline{y} + x\overline{y} = \overline{y}$

Esercizio 2
Conversione della parte intera:

- 125 : 2 = 62 con resto 1
- 62 : 2 = 31 con resto 0
- 31 : 2 = 15 con resto 1
- 15 : 2 = 7 con resto 1
- 7 : 2 = 3 con resto 1
- 3 : 2 = 1 con resto 1
- 1 : 2 = 0 con resto 1

Conversione della parte frazionaria:

- 0,512 × 2 = 1,024
- 0,024 × 2 = 0,048
- 0,048 × 2 = 0,096
- 0,096 × 2 = 0,192
- 0,192 × 2 = 0,384
- 0,384 × 2 = 0,768

Pertanto la rappresentazione in base 2 è 1111101,100000. Non è esatta perché la conversione della parte frazionaria è stata interrotta al 6° passo (come richiesto dalla rappresentazione), mentre la codifica esatta richiedeva più cifre.

Esercizio 3

$$xy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x} + x\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x} + x\overline{z} = \overline{x} + x\overline{z} = \overline{x}(1+\overline{z}) + x\overline{z} = \overline{x} + \overline{z}(x+\overline{x}) = \overline{x} + \overline{z}$$

Esercizio 4

a_1	a_2	b_1	b_2	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0

0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

la cui mappa di K. è

a_1a_2 \ b_1b_2	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	1

da cui $E_{\min} = \overline{a_2}\,\overline{b_1} + \overline{b_1} b_2 + a_1 \overline{b_1} + a_1 b_2 + a_1 \overline{a_2}$

Esercizio 5

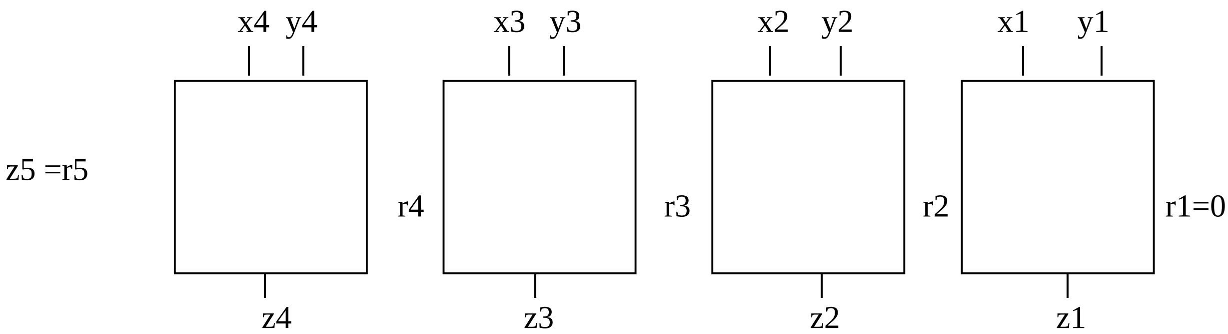
$x + \overline{y} + \overline{z} = x + NAND(y,z) = NAND(NAND(x,x), NAND(NAND(y,z), NAND(y,z)))$

Compito E

Esercizio 1 (10 punti)

Progettare un circuito che esegua la somma aritmetica di due stringhe di 4 bit ciascuna. Illustrare lo schema a blocchi del circuito, la funzione booleana dei componenti, le espressioni booleane minime in forma normale disgiuntiva, e lo schema circuitale.

Soluzione:



$x_i\ y_i\ r_i$	z_i	r_{i+1}
0 0 0	0	0
0 0 1	1	0
0 1 0	1	0
0 1 1	0	1
1 0 0	1	0
1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	1	1

z_i = not(x_i) not(y_i) r_i + not(x_i) y_i not(r_i) + x_i not(y_i) not(r_i) + $x_i y_i$ r_i

r_{i+1} = x_i r_i + x_i y_i + y_i r_i

Esercizio 2: **(4 punti)**

Dimostrare la seguente equivalenza di espressioni booleane (mostrare ogni passaggio nel trasformare l’espressione a destra del segno di uguaglianza in quella a sinistra, utilizzando gli assiomi dell’algebra di Boole) :

(a*not(b))+(not(a)*b)=(a+b)*(not(a)+not(b)) soluzione:

(a*not(b))+(not(a)*b) =

= ((a*not(b)) + not(a)) * ((a*not(b)) + b) =

= (not(a) + (a*not(b))) * (b + (a*not(b))) =

= ((not(a) + a)*(not(a)+ not(b))) * ((b+a) * (b + not(b))) =

= (1*(not(a)+not(b)))*((b+a) * 1) =

= (not(a) + not(b)) * (b +a) =

= (a +b) * (not (a) + not(b))

Esercizio 3: **(4 punti)**

Convertire in binario illustrando il procedimento i valori decimali x=42,37 e y=56,49 con una precisione di 5 cifre. Successivamente, eseguire la differenza tra le parti intere di x e y utilizzando una codifica a 7 cifre in complemento a due e decodificare il risultato in decimale.

Soluzione:

42 : 2 = 21	resto = 0	0,37 * 2 = 0,74
21 : 2 = 10	resto = 1	0,74 * 2 = 1,48
10 : 2= 5	resto = 0	0,48 * 2 = 0,96
5 : 2= 2	resto = 1	0,96 * 2 = 1,92
2:2 = 1	resto = 0	0,92 * 2 = 1,84
1: 2 = 0	resto = 1	

x = 101010, 01011

56 : 2 = 28	resto = 0	0,49 * 2 = 0,98
28 : 2 = 14	resto = 0	0,98 * 2 = 1,96
14 : 2= 7	resto = 0	0,96 * 2 = 1,92
7 : 2= 3	resto = 1	0,92 * 2 = 1,84
3:2 = 1	resto = 1	0,84 * 2 = 1,68
1: 2 = 0	resto = 1	

y = 111000, 01111

x-y = 0101010 – 0111000   0101010 + 1001000= 1110010

1110010 –1= 1110001   0001110 = 14   1110010 = -14

Esercizio 4: **(4 punti)**

Dati i numeri x=83771,37 x 10^2 e y=–3,41023 x 10^2 eseguire la somma e la differenza e rappresentare i risultati in notazione scientifica come x e y; rappresentare, poi, i risultati secondo la tripla <s, m, e> usando 6 cifre per la mantissa.

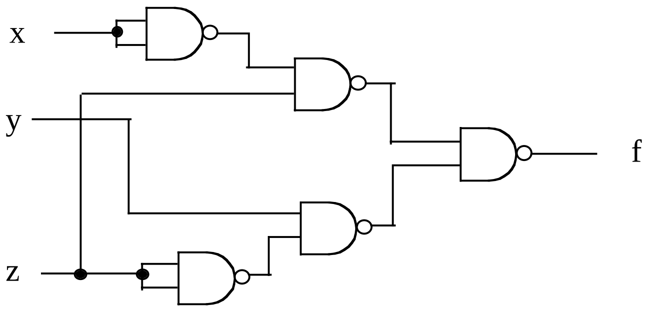
Soluzione:

x + y = 8,376795977 x 10^6 = < 0, 837679, 7>

x – y = 8,377478023 x 10^6 = < 0, 837747, 7>

Esercizio 5 (8 punti)

Analizzare il seguente circuito, ricavando la EB minima in forma normale disgiuntiva:



Soluzione:

xyz	output
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	0

mappa

		y, z			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	1
	1	0	0	0	0

not(x)*z + not(x)*y + y*not(z)

Compito F

Esercizio 1 (10 punti)

Progettare un circuito che riceve in ingresso 4 bit e produce in uscita la somma aritmetica dei bit di ingresso più 2 (cioè x0+x1+x2+x3+2),

Soluzione:

	y_0	y_1	y_2
0000	0	1	0
0001	0	1	1
0010	0	1	1
0011	1	0	0
0100	0	1	1
0101	1	0	0
0110	1	0	0
0111	1	0	1
1000	0	1	0
1001	1	0	0
1010	1	0	0
1011	1	0	1
1100	1	0	0
1101	1	0	1
1110	1	0	1
1111	1	1	0

mappa per y_0

x_0, x_1 \ x_2, x_3	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

$y_0 = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3$

mappa per y_1

x_0, x_1	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	0	0	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	0

$y_1 = \text{not}(x_0)\text{not}(x_1)\text{not}(x_2)+\text{not}(x_0)\text{not}(x_1)\text{not}(x_3)+\text{not}(x_0)\text{not}(x_2)\,\text{not}(x_3)$
$+ x_0x_1x_2x_3+ x_0\text{not}(x_1)\text{not}(x_2)\text{not}(x_3)$

mappa per y_2

	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	0	1	0
11	0	1	0	1
10	0	0	1	0

$y_2=\text{not}(x_0)\text{not}(x_1)\text{not}(x_2)\,x_3+\text{not}(x_0)\text{not}(x_1)\,x_2\text{not}(x_3)+$
$+ \text{not}(x_0)x_1\text{not}(x_2)\text{not}(x_3)+ \text{not}(x_0)x_1x_2x_3+ x_0\,x_1\text{not}(x_2)x_3$
$+ x_0\,x_1x_2\text{not}(x_3)+ x_0\,\text{not}(x_1)x_2x_3$

Esercizio 2: (**4 punti**)

Dimostrare la seguente equivalenza di espressioni booleane (mostrare ogni passaggio nel trasformare l’espressione a destra del segno di uguaglianza in quella a sinistra, utilizzando gli assiomi dell’algebra di Boole) :

(a+not(b))*(not(a)+b)=(a*b)+(not(a)*not(b)) soluzione:

(a+not(b))*(not(a)+b) =

= ((a+not(b)) *not(a)) + ((a+not(b)) * b) =

= (not(a) * (a+not(b))) + (b *(a+not(b))) =

= ((not(a) * a)+(not(a)*not(b))) +((b*a) + (b * not(b))) =

= (0+(not(a)*not(b)))+((b*a) + 0) =

= (not(a) * not(b)) + (b *a) =

= (a *b) + (not (a) * not(b))

<u>Versione alternativa:</u>
Progettare un circuito che riceve in ingresso 4 bit e produce in uscita la somma aritmetica dei bit di ingresso più 2 modulo 16 (es.: 14+2=0, 15+2=1)

Soluzione:

		y_3 y_2 y_1 y_0
0000	0	0010
0001	1	0011
0010	2	0100
0011	3	0001
0100	4	0110
0101	5	0111
0110	6	1000
0111	7	1001
1000	8	1010
1001	9	1011
1010	10	1100
1011	11	1101
1100	12	1110
1101	13	1111
1110	14	0000
1111	15	0001

Esercizio 3: (**4 punti**)

Convertire in binario illustrando il procedimento i valori decimali x=35,46 e y=61,51 con una precisione di 5 cifre. Successivamente, eseguire la differenza tra le parti intere di x e y utilizzando una codifica a 7 cifre in complemento a due e decodificare il risultato in decimale.

Soluzione:

35:2=17 resto= 1   0,,46*2=0,92

17:2=8	resto=1	0,92*2=1,84
8:2=4	resto=0	0,84*2=1,68
4:2=2	resto=0	0,68*2=1,32
2:2=1	resto=0	0,32*2=0,64
1:2=0	resto=1	x=100011,01110

61:2=30	resto=1	0,,51*2=1,02
30:2=15	resto=0	0,02*2=0,04
15:2=7	resto=1	0,04*2=0,08
7:2=3	resto=1	0,08*2=0,16
3:2=1	resto=1	0,16*2=0,32
1:2=0	resto=1	y= 111101,10000

x – y = 0100011 – 0111101   0100011 + 1000011 = 1100110

1100110 –1= 1100101   0011010 = 26   1100110 = 26

Esercizio 4: (**4 punti**)

Dati i numeri x=72660,26 x 10^2 e y=–2,39132 x 10^1 eseguire la somma e la differenza e rappresentare i risultati in notazione scientifica come x e y; rappresentare, poi, i risultati secondo la tripla <s, m, e> usando 6 cifre per la mantissa.

Soluzione:

x + y = 7,2660020868 x 10^6 = < 0, 726600, 7>

x – y = 7,2660499132 x 10^6 = < 0, 726604, 7>

Esercizio 5 (8 punti)

Analizzare il seguente circuito (come in compito E), ricavando la EB minima in forma normale congiuntiva

Soluzione:

xyz	output
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	0

110	1
112	0

mappa

		y, z			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	1
	1	0	0	0	0

(not(y)+not(z)) * x