Esercizio 1 Un commerciante di bambole etnografiche dispone di un insieme di n bambole in legno ognuna delle quali è inseribile in una di formato più grande: queste bambole, conosciute come "matrioska", sono un simbolo dell'arte popolare della Russia e rappresentano il souvenir russo per eccellenza. Le bambole hanno numeri di inventario in $[1, n]$ ed altezze che indicheremo con $h_1, ...h_n$. Le altezze di alcune bambole possono coincidere, ed in tal caso le bambole non sono inseribili l'una nell'altra. In generale, l'inserimento dell'i-esima matrioska all'interno della j-esima è possibile se e solo se $h_i < h_j$.

Il commerciante vuole disporre alcuni esemplari di matrioska sullo scaffale del suo negozio. Per invogliare all'acquisto i potenziali clienti, vuole inserire l'una nell'altra il maggior numero possibile di bambole, ottenendo quindi il massimo livello di "nidificazione". Per non creare però troppo disordine nelle scorte di bambole rimanenti in magazzino, vuole scegliere le bambole da esporre considerando solo numeri di inventario crescenti. Il problema del commerciante è quindi di determinare il massimo numero k di bambole $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ tali che

$$h_{i_1} > h_{i_2} > ... > h_{i_k}$$

e

$$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$$

Ad esempio, siano $n = 7$ e le altezze come nella seguente tabella:

i	1	2	3	4	5	6	7
h_i	10	30	20	5	3	8	1

- Poiché le altezze sono tutte distinte, le bambole potrebbero in teoria essere tutte inserite l'una nell'altra. Così facendo non rispetteremmo però il vincolo sui numeri di inventario crescenti: risulterebbe infatti $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 1$, $i_4 = 6$, $i_5 = 4$, $i_6 = 5$, $i_7 = 7$. L'insieme di tutte le bambole non è pertanto una soluzione ammissibile.
- Una possibile soluzione è rappresentata dall'insieme di bambole con numeri di inventario $i_1 = 1$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$ e $i_4 = 7$.
- La soluzione ottima ha cardinalità pari a 5, ed è rappresentata dall'insieme di bambole con numeri di inventario $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 4$, $i_4 = 5$ e $i_5 = 7$.

1. *(max 10 punti)* Proporre un algoritmo basato sulla tecnica della programmazione dinamica che in tempo $O(n^2)$ calcoli la cardinalità della soluzione ottima.
2. *(max 10 punti)* Modificare l'algoritmo proposto al punto 1 in modo da avere in output i numeri di inventario delle bambole da esporre sullo scaffale. La modifica deve avere costo additivo $O(n)$.
3. *(max 10 punti)* Mostrare che nel caso in cui il vincolo sui numeri di inventario venga rilassato è possibile progettare un algoritmo greedy più efficiente di quello proposto al punto 1.

Soluzione Esercizio 1

1. Il problema può essere pensato come la ricerca della più lunga sottosequenza di bambole di altezza decrescente contenuta nella sequenza $B_1, ..., B_n$. Possiamo quindi studiare il sottoproblema $\mathcal{P}(i)$ che richiede di calcolare la lunghezza della più lunga sottosequenza di bambole di altezza decrescente contenuta nella sequenza $B_1, ..., B_i$ e contenente la bambola B_i.

   Memorizziamo le soluzioni parziali in un array P di dimensione $n + 1$, che riempiremo utilizzando la seguente ricorrenza (simmetrica a quella usata per il problema della più lunga sottosequenza crescente studiato in classe):

$$P[i] = 1 + \max_{1 \leq j < i : h_j > h_i} \{P[j]\}$$

Risulterà $P[1] = 1$ e la soluzione del problema originario sarà

$$max_{1 \leq i \leq n} P[i]$$

Usando la ricorrenza, possiamo ottenere un algoritmo che risolve il problema in tempo $O(n^2)$ come segue:

INPUT: n, altezze h_i delle bambole
    $P[1] \leftarrow 1$
    FOR $i = 2$ TO n DO
        $max \leftarrow 0$
        FOR $j = i - 1$ DOWNTO 1 DO
            IF $h_j > h_i$ AND $max < P[j]$
            THEN $max \leftarrow P[j]$
        $P[i] \leftarrow max + 1$
    $max \leftarrow P[1]$
    FOR $i = 2$ TO n DO
        IF $max < P[i]$ THEN $max \leftarrow P[i]$
    RETURN max

2. Dato l'array P, la sottosequenza decrescente di lunghezza massima può essere ricostruita in tempo $O(n)$ procedendo dall'ultimo verso il primo elemento dell'array come segue:

   INPUT: n, array P, altezze h_i
   OUTPUT: l'array binario SOL (di dimensione n) tale che $SOL[i] = 1$ se e solo se la bambola B_i è nella sottosequenza decrescente più lunga
    $m \leftarrow 1$
    FOR $i = 1$ TO n DO
        $SOL[i] \leftarrow 0$
        IF $P[m] < P[i]$ THEN $m \leftarrow i$
    $SOL[m] \leftarrow 1$
    FOR $j = m - 1$ DOWNTO 1 DO
        IF $h_j > h_m$ AND $P[j] = P[m] - 1$
        THEN $SOL[j] \leftarrow 1$
                $m \leftarrow j$
    RETURN SOL

   Il tempo di esecuzione è chiaramente lineare.

3. Nel caso in cui le bambole possono essere scelte in un ordine qualunque (non necessariamente sequenziale), per risolvere il problema basta ordinare l'insieme delle bambole per altezze decrescenti. Occorre poi esaminare le bambole ordinatamente da quella con altezza massima a quella con altezza minima, mettendo nella soluzione una ed una sola bambola per ogni altezza distinta incontrata. Il tempo di esecuzione è dominato dall'ordinamento, ed è quindi $O(n \log n)$.