Appendice C

Complementi sui numeri naturali

Nel paragrafo 8.3 abbiamo riportato una dimostrazione del celebre teorema euclideo sull'infinità dei numeri primi. Occupiamoci ora della dimostrazione del teorema seguente, dovuto a Euler (Tenenbaum & Mendès France, 1997).

Proposizione. La serie dei reciproci dei numeri primi diverge.

Dimostrazione (Euler). Consideriamo innanzitutto che ogni intero positivo n può essere scritto in forma unica nome prodotto di un numero q privo di fattori quadrati e di un numero m^2. Indicando con q un numero privo di fattori quadrati, possiamo scrivere:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\sum_{q\le x}\left(\frac{1}{q}\sum_{m\le\sqrt{x/q}}\frac{1}{m^2}\right)\le\sum_{q\le x}\left(\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\right)$$

(la prima uguaglianza potrebbe non apparire subito evidente: suggeriamo al lettore di prendere confidenza con essa facendo qualche prova; ad esempio con $x = 20$). La seguente minorazione non richiede particolari commenti:

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\le 1+\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{(m-1)m}=1+\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=2$$

(la serie $\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{(m-1)m}=\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=1$, è detta "telescopica") da cui:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\le 2\sum_{q\le x}\frac{1}{q}$$

Consideriamo ora la $\sum_{q\le x}\frac{1}{q}$ e indichiamo con p un primo:

$$\sum_{q\le x}\frac{1}{q}\le\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right)\le\exp\left\{\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right\}$$

La prima minorazione si ottiene sviluppando $\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right)$; la seconda notando che è: $1+a\le e^a$ (tale disequazione può essere un utile esercizio) e ponendo quindi in questa formula: $a = 1/p$. Possiamo dunque scrivere:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\le 2\exp\left\{\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right\}$$

Occupiamoci del primo membro della disuguaglianza. Da $\frac{1}{n}\ge\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$, risulta:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ge\sum_{n\le x}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\ge\log x$$

e ciò ci permette di scrivere:

$$\log x\le\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\le 2\exp\left\{\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right\}$$

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\ge\log\log x-\log 2$$

Considerando che $\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$ possiamo affermare che la serie dei reciproci dei numeri primi diverge. ν

Di questo stesso risultato proponiamo un'altra affascinante dimostrazione, pubblicata nel 1938 da Paul Erdös (1913-1997; Aigner & Ziegler, 1998).

Dimostrazione (Erdös). Siano $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 < \dots$ i numeri primi (in ordine crescente).

Ammettiamo per assurdo che la serie dei reciproci dei primi sia convergente: allora esisterebbe un indice naturale k tale che:

$$\sum_{i\ge k+1}\frac{1}{p_i}<\frac{1}{2}$$

Chiameremo i numeri $p_1, \ldots, p_k$ *primi piccoli* ed i numeri $p_{k+1}, p_{k+2} \ldots$ *primi grandi*. Per un numero positivo arbitrario N scriveremo:

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2} \tag{1}$$

Sia ora N_b il numero degli interi positivi $n \leq N$ divisibili per almeno un primo grande e sia N_s il numero degli interi positivi $n \leq N$ divisibili soltanto per dei primi piccoli. Vogliamo dimostrare che per un qualche N è $N_b + N_s < N$, e questa sarà la cercata contraddizione: per definizione $N_b + N_s$ dovrebbe essere uguale a N.

Per valutare N_b ricordiamo che $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ è il numero degli interi positivi $n \leq N$ che sono multipli di p_i. Quindi, dalla precedente disuguaglianza (1) otteniamo:

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2} \tag{2}$$

Occupiamoci ora della valutazione di N_s; abbiamo già sopra ricordato (nel corso della dimostrazione euleriana) che ogni intero positivo n può essere scritto in forma unica come prodotto di un numero privo di fattori quadrati e di un quadrato; scriviamo pertanto ogni $n \leq N$ che ha soltanto divisori primi piccoli nella forma $n = a_n b_n^2$, dove a_n è una parte priva di fattori quadrati. Ogni a_n è perciò un prodotto di primi piccoli diversi, e grazie a tale osservazione possiamo affermare che esistono esattamente 2^k diverse parti prive di fattori quadrati. Inoltre, essendo $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, notiamo che ci sono al più $\sqrt{N}$ valori ammissibili per b_n, da cui:

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}$$

Dato che la (2) è valida per ogni N, per ottenere la contraddizione sopra anticipata ci resta da trovare un numero N tale che $2^k \sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$ ovvero tale che $2^{k+1} \sqrt{N} \leq N$; un tale numero è $N = 2^{2k+2}$ e dunque per esso verrebbe ad essere $N_b + N_s < N$: ciò completa la dimostrazione per assurdo. ν

Concludiamo questa appendice ricordando alcuni importanti problemi aperti della teoria dei numeri: uno dei più celebri di essi è la congettura di Goldbach, suggerita (ma non provata) in uno scambio di lettere tra Christian Goldbach (1690-1764) e Leonhard Euler (1707-1783) nel giugno 1742, secondo la quale *tutti i naturali pari maggiori di 2 sono somme di due numeri primi* (non necessariamente distinti).

Esempio. La congettura di Goldbach è facilmente verificabile per alcuni pari:

$$4 = 2+2$$
$$6 = 3+3$$
$$8 = 3+5$$
$$10 = 3+7 = 5+5$$

etc.

Ma ciò vale per *tutti* i numeri pari? Nessuno finora (2003) è stato capace di dimostrarlo né di trovare un naturale pari maggiore di 2 che *non* sia esprimibile come somma di due numeri primi.

La teoria additiva dei numeri si è sviluppata a partire dalla fine del XVIII secolo. Risultato fondamentale per tale teoria è il teorema seguente:

Proposizione (Lagrange). Ogni naturale è la somma di quattro quadrati.

Un insieme B di naturali è detto base di ordine *h* se ogni naturale può essere scritto come somma di *h* elementi di B (non necessariamente distinti). Ad esempio, il teorema di Lagrange stabilisce che l' insieme $\{n\in\mathbf{N}: n = x^2 \text{ e } x\in\mathbf{N}\}$ è una base di ordine 4.

Il problema fondamentale della teoria additiva dei numeri è stabilire se un assegnato sottoinsieme di N è una base di ordine finito.

La congettura di Goldbach esprime il problema analogo applicato ai naturali pari maggiori di 2, con la base di ordine due costituita dall'insieme dei primi.

Proposizione (1919-1920, Brun). Ogni intero non negativo pari "abbastanza" grande è la somma di due numeri aventi ciascuno non più di nove fattori primi.

Proposizione (1930, Shrinel'man). Ogni intero maggiore di 1 è la somma di un limitato numero di primi.

Proposizione (1937, Vinogradov). Ogni intero dispari "abbastanza" grande o è primo o è la somma di tre primi.

Proposizione (1966-1978, Chen). Ogni intero pari "abbastanza" grande può essere scritto come somma di un primo dispari e di un numero che o è primo o è il prodotto di due primi.

Un'altra celebre congettura a tutt'oggi non provata è detta *dei primi gemelli*. Alcune coppie di numeri primi sono costituite da p e da p+2 (primi gemelli):

3, 5 11, 13 17, 19 etc.

Ebbene, esistono infinite coppie di primi gemelli? Ancora una volta il problema è aperto (2003).

Osservazione. La presenza di questi e di altri problemi aperti riguardanti i primi (anche apparentemente semplici: esistono infiniti primi della forma n^2+1?) induce a qualche riflessione. C'è una forte asimmetria tra l'*addizione* e la *moltiplicazione*. Rispetto alla *moltiplicazione* (elemento neutro 1), infatti, esistono infiniti elementi "atomici": i primi. La scomposizione di un naturale in un prodotto di naturali "atomici rispetto alla *moltiplicazione*" è interessante, semplifica la trattazione del numero dato. Invece rispetto all'*addizione* (elemento neutro 0) esiste un solo elemento atomico: 1. La scomposizione di un naturale in un prodotto di naturali "atomici rispetto all' *addizione*" è banale (1+1+ …+1) e non semplifica la trattazione del numero dato.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Acceſſit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; scholijs illuſtrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI
e Societate IESV.

ROMAE,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

PERMISSV SVPERIORVM.

Pet. Le Brun.

Il frontespizio degli *Elementi* euclidei
con il commento di Cristoforo Clavio (Roma, 1603)