I
Insiemi e funzioni

1. INSIEMI ED OPERAZIONI SU DI ESSI

1.1. Insiemi

Dal punto di vista intuitivo, il concetto di insieme può essere fatto corrispondere all'atto mentale mediante il quale associamo alcuni elementi in un tutto unico detto *insieme*. Tale descrizione è però vaga e imprecisa; la teoria degli insiemi può essere introdotta assiomaticamente: l'applicazione del metodo assiomatico alla teoria degli insiemi ebbe in Ernest Zermelo (1871-1953) il principale protagonista (dedicheremo a tale argomento l'appendice A).
In questa fase ci limiteremo ad introdurre le principali nozioni insiemistiche mantenendo un punto di vista intuitivo. Non è richiesta alcuna particolare omogeneità tra gli elementi che costituiscono un insieme: è possibile associare nello stesso insieme un numero qualsiasi di elementi di qualsiasi genere (nel paragrafo 4.2 ci occuperemo della questione dell'eventuale appartenenza di un insieme a se stesso come elemento).

Esempio. È possibile parlare di un insieme a cui appartengono il nome del monte più alto della Terra, l'ultima lettera dell'alfabeto italiano e le soluzioni dell'equazione: $x^2+6 = 5x$. Tale insieme ha elementi: Everest, Z, 2, 3.

L'insieme privo di elementi si dice *insieme vuoto*; si indica col simbolo $\varnothing$.

Esempio. L'insieme costituito dalle soluzioni intere di: $x^3 = 2$ è l'insieme vuoto, $\varnothing$: ciò equivale ad affermare che l'equazione data non ha radici intere.

Affinché una collezione di elementi possa essere classificata come un insieme vero e proprio, deve sempre essere possibile stabilire se un qualsiasi elemento appartiene (o non appartiene) all'insieme così introdotto.

Esempio. Ha senso, nella teoria degli insiemi, parlare dell'insieme costituito dai numeri reali maggiori di 4. Infatti è possibile stabilire oggettivamente se un qualsiasi elemento appartiene o no a tale insieme: per appartenere all'insieme, un elemento deve (contemporaneamente):
- essere un numero reale;
- essere maggiore di 4.

Dunque all'insieme introdotto apparterranno certamente elementi come 59, 19, 33/8; mentre non vi apparterranno elementi come -1, 31/8, 4 (che sono numeri reali, ma non sono maggiori di 4), o come Firenze, Hemingway, un esagono regolare, il numero $\sqrt{-5}$ (che non sono numeri reali).

(Contro)esempio. Non ha senso, nella teoria degli insiemi, parlare dell'insieme costituito dai libri *interessanti*: non è infatti possibile affermare oggettivamente se un libro è interessante oppure se non lo è.

È convenzione spesso accettata indicare gli insiemi con lettere maiuscole (A, B, C, ...) e gli elementi con minuscole (a, b, c, ...). L'appartenenza dell'elemento a all'insieme A si indica con la scrittura $a \in \mathrm{A}$ nella quale il simbolo "$\in$" si legge: "appartiene". La non appartenenza di b a B si indica con $b \notin \mathrm{B}$. Quindi la condizione richiesta per poter parlare di insieme, espressa precedentemente, è: *affinché I sia un insieme, è richiesto che, per ogni elemento a, sia possibile stabilire che l'affermazione* $a \in \mathrm{I}$ *sia vera o falsa*.

Per indicare dettagliatamente gli insiemi, con i loro elementi, si possono scegliere diversi procedimenti. Un primo metodo, detto *rappresentazione tabulare*, consiste nell'elencare tutti gli elementi che costituiscono l'insieme in questione tra parentesi graffe; ad esempio, la scrittura I = {1; 2; 5} significa che all'insieme I appartengono (solamente) gli elementi 1, 2 e 5. Notiamo che l'ordine con cui si elencano gli elementi è privo di importanza. Un insieme non presuppone alcun particolare ordinamento dei suoi elementi e nemmeno considera eventuali ripetizioni fatte nell'elencarli; le scritture

$$\{1; 2; 5\} \quad \{1; 5; 2\} \quad \{2; 1; 5\} \quad \{2; 5; 1\} \quad \{5; 1; 2\} \quad \{5; 2; 1\} \quad \{1; 2; 1; 5\}$$

identificano tutte lo stesso insieme, cioè l'insieme avente per elementi 1, 2 e 5.

Talvolta la rappresentazione tabulare può essere scomoda e addirittura impraticabile quando l'insieme in questione è costituito da infiniti elementi. La *rappresentazione caratteristica* si ottiene evidenziando (ove ciò sia possibile) una condizione necessaria e sufficiente per l'appartenenza di un elemento all'insieme considerato. La scrittura dell'insieme avrà forma:

$$\{x\text{: } x \text{ rispetta un'assegnata condizione}\}$$

nella quale il simbolo ":" (talvolta sostituito da "|") si legge "tale che".

Esempio. Indichiamo l'insieme I di interi il cui quadrato è minore di 15:
- rappresentazione tabulare: I = {–3; –2; –1; 0; 1; 2; 3};
- rappresentazione caratteristica: I = {x: x è un numero intero e $-3 \le x \le 3$}.

Si noti, inoltre, che si possono trovare diverse (ma equivalenti) rappresentazioni caratteristiche per lo stesso insieme. Nell'esempio precedente, avremmo alternativamente potuto caratterizzare l'insieme scrivendo I = {x: x è un numero intero e $x^2<15$}.

Nell'esempio precedente abbiamo scritto (usando parole tratte dalla lingua italiana) che l'elemento x "è un numero intero", cioè appartiene all'*insieme costituito dai numeri interi*. Questo insieme è generalmente indicato con il simbolo **Z**. Anche altri insiemi numerici sono di uso frequente:

$\mathbf{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbf{N_0}$	insieme dei numeri naturali non nulli
$\mathbf{Z}$	insieme dei numeri interi
$\mathbf{Z_0}$	insieme dei numeri interi non nulli
$\mathbf{Z}^+$	insieme di numeri interi positivi
$\mathbf{Z}^-$	insieme dei numeri interi negativi

Q	insieme dei numeri razionali
$\mathbf{Q_0}$	insieme dei numeri razionali non nulli
$\mathbf{Q}^+$	insieme dei numeri razionali positivi
$\mathbf{Q}^-$	insieme dei numeri razionali negativi
R	insieme dei numeri reali
$\mathbf{R_0}$	insieme dei numeri reali non nulli
$\mathbf{R}^+$	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbf{R}^-$	insieme dei numeri reali negativi
C	insieme dei numeri complessi

Dunque l'insieme dei numeri interi il cui quadrato è minore di 15 può scriversi $\{x: x\in \mathbf{Z}$ e $-3 \le x \le 3\}$ oppure $\{x\in \mathbf{Z}: -3\le x\le 3\}$.

Come si vede, la condizione con la quale si definisce un insieme è di solito espressa mediante una (o più) proprietà o "predicato". Questo fatto è il legame tra la teoria degli insiemi e la logica degli enunciati e dei predicati che vedremo più avanti.

1.2. Sottoinsiemi ed inclusione

Considerato un insieme A, diremo che un insieme B è un sottoinsieme di A se *a B non appartengono elementi non appartenenti ad A*: dunque B può essere costituito da alcuni elementi di A, o da tutti gli elementi di A, o da nessun elemento.

Definizione. L'insieme B si dice *sottoinsieme* dell'insieme A se ogni elemento di B è elemento di A, cioè <u>se</u> $x\in$ B <u>allora</u> $x\in$ A; si dice anche che B è *incluso* in A e si scrive $B\subseteq A$.

Tra tutti i sottoinsiemi di un insieme dato A troviamo sempre l'insieme A stesso e l'insieme vuoto $\varnothing$: essi sono detti *sottoinsiemi impropri* di A; un sottoinsieme di A diverso da A stesso e da $\varnothing$ si dice *sottoinsieme proprio* di A.

L'insieme vuoto ammette uno ed un solo sottoinsieme (improprio): $\varnothing$. Un insieme costituito da un solo elemento, $A = \{a\}$, ammette due sottoinsiemi impropri, $\varnothing$ ed A stesso, e non ammette alcun sottoinsieme proprio.

Definizione. Si dice *insieme delle parti* di un insieme I l'insieme $\wp(\mathrm{I})$ avente per elementi tutti i sottoinsiemi (propri ed impropri) di I: $\wp(\mathrm{I}) = \{\mathrm{J}: \mathrm{J}\subseteq \mathrm{I}\}$.

Diremo che due insiemi A e B sono *uguali*, e scriveremo A = B, quando A è sottoinsieme di B e contemporaneamente B è sottoinsieme di A, cioè quando: $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Questa (apparentemente) innocente definizione ha delle gravi consguenze: accettandola, consideriamo un insieme soltanto in base ai suoi elementi (estensione) e non, ad esempio, alla proprietà che lo definisce: dunque, l'insieme degli uomini nati nell'anno 1200 ed ancora viventi nel 2000 e l'insieme dei cerchi quadrati sono uguali.

1.3. Operazioni con gli insiemi: unione, intersezione, differenza

Definizione. L'insieme $A \cup B$, *unione* degli insiemi A e B, è l'insieme al quale appartengono gli elementi che appartengono almeno ad uno degli insiemi A e B: $A \cup B = \{x: x \in A$ <u>o</u> $x \in B\}$.

Esempio. L'unione degli insiemi $A = \{x \in \mathbf{R}: 1<x<5\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R}: 3<x<15\}$ è l'insieme $A \cup B = \{x \in \mathbf{R}: 1<x<15\}$.

Definizione. L'insieme $A \cap B$, *intersezione* degli insiemi A e B, è l'insieme al quale appartengono gli elementi che appartengono contemporaneamente agli insiemi A e B: $A \cap B = \{x: x \in A$ <u>e</u> $x \in B\}$.

Esempio. L'intersezione di $A = \{x \in \mathbf{R}: 1<x<5\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R}: 3<x<15\}$ è l'insieme $A \cap B = \{x \in \mathbf{R}: 3<x<5\}$.

Due insiemi ad intersezione vuota si dicono *disgiunti*. Si verifica che:

$I \cup I = I$ (infatti all'unione di I e di I appartengono tutti e soltanto gli elementi appartenenti a I o a I).
$I \cup \varnothing = I$ (infatti all'unione di I e di $\varnothing$ appartengono tutti e soltanto gli elementi appartenenti a I o a $\varnothing$; ma a $\varnothing$ non appartiene alcun elemento...).
$I \cap I = I$
$I \cap \varnothing = \varnothing$
$I \cup J = J \cup I$ (proprietà commutativa)
$I \cap J = J \cap I$ (proprietà commutativa)
$I \cup (J \cup K) = (J \cup I) \cup K$ (proprietà associativa)
$I \cap (J \cap K) = (J \cap I) \cap K$ (proprietà associativa)
$I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap (I \cup K)$ (proprietà distributiva)
$I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (I \cap K)$ (proprietà distributiva)

Definizione. L'insieme $A \backslash B$, *differenza* degli insiemi A e B, è l'insieme al quale appartengono gli elementi che appartengono ad A ma <u>non</u> appartengono a B: $A \backslash B = \{x: x \in A$ e $x \notin B\}$.

Esempio. La differenza di $A = \{x \in \mathbf{R}: 1<x<5\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R}: 3<x<15\}$ è l'insieme $A \backslash B = \{x \in \mathbf{R}: 1<x \le 3\}$.

Per quanto riguarda le proprietà dell'operazione introdotta, si verifica che:

$I \backslash I = \varnothing$
$I \backslash \varnothing = I$
$\varnothing \backslash I = \varnothing$

È da notare che le operazioni tra insiemi che abbiamo introdotto sono state espresse in base al predicato di appartenenza ($\in$) ed usando i connettivi grammaticali o, e e non, combinando cioè tra di loro mediante connettivi, le proprietà che definiscono gli insiemi. In realtà anche l'inclusione tra insiemi è sta introdotta attraverso il se….allora.

1.4. Il prodotto cartesiano di due insiemi

Quanto finora esposto a proposito del concetto di insieme non fa riferimento all'ordine con cui gli elementi di un insieme sono elencati. È però utile, in determinati casi, specificare un particolare ordinamento all'interno di un dato insieme: è quanto ci accingiamo a fare introducendo la *coppia ordinata*.

Siano A e B due insiemi che supporremo dati. Una coppia ordinata di elementi di A e di B si indica con il simbolo $(a; b)$. Intuitivamente, essa è un particolare insieme costituito da due elementi, il *primo* dei quali appartenente ad A, il *secondo* a B. Più precisamente, la coppia ordinata $(a; b)$ può essere introdotta sulla base del concetto di coppia ordinaria (cioè non ordinata) $\{a; b\}$: si può ad esempio scegliere due elementi distinti esterni all'insieme considerato (nel nostro caso, agli insiemi A e B), ad esempio 1 e 2, e definire $(a; b)$ come $\{\{1; a\}; \{2; b\}\}$. Alternativamente, si può "specificare" quale dei due elementi è da ritenere il primo della coppia ordinata, considerando per $(a; b)$ ad esempio $\{\{a\}; \{a; b\}\}$.

Definizione. L'insieme A×B, *prodotto cartesiano* degli insiemi A e B, è l'insieme avente per elementi tutte le coppie ordinate (a, b), con $a\in A$ e $b\in B$: $A\times B = \{(a; b): a\in A \text{ e } b\in B\}$.

Nel caso in cui (almeno) uno dei due insiemi A e B sia $\varnothing$, A×B è vuoto.

Esempio. Il prodotto cartesiano di $A = \{c; d\}$ e $B = \{2; 4; 7\}$ è $A\times B = \{(c; 2); (d; 2); (c; 4); (d; 4); (c; 7); (d; 7)\}$.

La costruzione del prodotto cartesiano di due insiemi A e B è importante perché combina gli elementi dei due insiemi in modo tale da poter riottenere per ogni elemento dell'uno tutta una copia dell'altro. Ciò vale anche per un qualunque sottoinsieme $S\subseteq A\times B$ (l'importanza dei sottoinsiemi del prodotto cartesiano apparirà evidente a partire dal prossimo paragrafo). Introduciamo dunque le *proiezioni*.

Definizione. Sia $S\subseteq A\times B$. Di dice proiezione di S su A (rispettivamente, su B) l'insieme $U = \{x: x\in A \text{ e } (x; b)\in S \text{ per almeno un } b\in B\}$ (rispettivamente, $\{y: y\in B \text{ e } (a; y)\in S \text{ per almeno un } a\in A\}$).

Evidentemente la proiezione di tutto l'insieme (non vuoto) A×B su A è A stesso, e su B è B stesso.

Esempio. Sia S il sottoinsieme di **N**×**N** costituito dalle coppie $(n; m)$ tali che $n+m = 3$. Lasciamo al lettore di verificare che $S = \{(0; 3); (1; 2); (2; 1); (3; 0)\}$. La proiezione di S su **N** è $U = \{0; 1; 2; 3\}$.

N.B.: nell'esempio precedente, **N** è sia il primo che il secondo degli insiemi dei quali viene considerato il prodotto cartesiano **N**×**N.** Tuttavia, in generale, tali insiemi saranno distinti, come appare chiaro dall'esempio seguente.

Esempio. Sia T il sottoinsieme di **N**×**N** costituito dalle coppie (n; m) tali che $2n+m = 4$. Lasciamo al lettore di verificare che T = {(0; 4); (1; 2); (2; 0)}. La proiezione di S sulla prima componente di **N**×**N** è U_1 = {0; 1; 2} mentre la proiezione di S sulla seconda componente è U_2 = {0; 2; 4}.

2. RELAZIONI E LORO PROPRIETÀ

2.1. Sottoinsiemi del prodotto cartesiano

Siano dati gli insiemi A, B e A×B. Come sappiamo, ad A×B appartengono tutte le coppie ordinate costituite da un primo elemento tratto da A e da un secondo elemento tratto da B. Può essere opportuno, in alcuni casi, evidenziare alcuni particolari sottoinsiemi di A×B: ad esempio, per sottolineare che alcune coppie di A×B rispettano una qualche proprietà o verificano una legge.

Definizione. Si dice *relazione* (o *corrispondenza*) tra gli insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano A×B.

Esempio. Consideriamo gli insiemi:

A = {Arno; Po; Tevere}   B = {Firenze; Pisa; Torino}

e il loro prodotto cartesiano:

A×B = {(Arno; Firenze); (Arno; Pisa); (Arno; Torino);
(Po; Firenze); (Po; Pisa); (Po; Torino);
(Tevere; Firenze); (Tevere; Pisa); (Tevere; Torino)}

Tra tutte le coppie aventi per primo elemento un elemento di A (in questo caso, un fiume) e per secondo un elemento di B (una città), individuiamo *quelle costituite dal nome di un fiume e da quello di una città bagnata da tale fiume*:

R = {(Arno; Firenze); (Arno; Pisa); (Po; Torino)}

L'importanza del sottoinsieme R di A×B è evidente: esso sottolinea che tutte (e soltanto) le coppie ad esso appartenenti verificano una determinata proprietà, ovvero sono costituite da un fiume e da una città bagnata da esso.

Il sottoinsieme R ora indicato è uno dei possibili sottoinsiemi di A×B: altri sottoinsiemi possono essere individuati da altre considerazioni (tutte ugualmente valide dal punto di vista insiemistico).

Quando si considera la coppia (a; b) appartenente ad un dato sottoinsieme R di A×B, si dice che l'elemento $a \in$ A ha per corrispondente $b \in$ B nella relazione R, oppure *a è in relazione con b*.

Una relazione, come ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano di insiemi, può essere rappresentata graficamente. Il precedente esempio può essere rappresentato dalla seguente tabella:

Torino		X	
Pisa	X		
Firenze	X		
	Arno	Po	Tevere

2.2. La relazione inversa

Si consideri una relazione tra gli elementi degli insiemi A e B, cioè $R \subseteq A \times B$. Consideriamo quindi una *nuova* relazione, che indicheremo con R^{-1}, tra gli elementi degli insiemi B e A, $R^{-1} \subseteq B \times A$, definita nel modo seguente:

$$(y; x) \in R^{-1} \quad \underline{\text{se e soltanto se}} \quad (x; y) \in R$$

Tale nuova relazione R^{-1} è denominata *relazione inversa* della relazione R, come espresso dalla definizione seguente.

Definizione. Data la relazione $R \subseteq A \times B$, si dice *relazione inversa* della R la relazione $R^{-1} \subseteq B \times A$ tale che $R^{-1} = \{(b; a): (a; b) \in R\}$.

Esempio. Siano assegnati gli insiemi A = {1; 2; 5} e B = {1; 3}, e la relazione $R \subseteq A \times B$ definita da:

$$R = \{(a; b): a \leq b\} = \{(1; 1); (1; 3); (2; 3)\}$$

La relazione inversa R^{-1} è la seguente:

$$R^{-1} = \{(b; a): b \geq a\} = \{(1; 1); (3; 1); (3; 2)\}$$

2.3. Relazioni tra un insieme e se stesso e loro proprietà

Per la definizione sopra introdotta del prodotto cartesiano di due insiemi, non è necessario che gli insiemi in questione siano distinti: come abbiamo visto, è possibile parlare del prodotto cartesiano I×I, costituito dall'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in$ I e $b \in$ I. Esamineremo le caratteristiche delle relazioni definite in I×I.

Le relazioni tra un insieme I e se stesso possono infatti godere di interessanti proprietà, introdotte dalle definizioni seguenti:

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *riflessiva* se, per *ogni* $a \in I$, vale $(a; a) \in R$.

Cioè, una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà riflessiva (si dice anche "è riflessiva") se *ogni* elemento dell'insieme considerato è in relazione con se stesso. Nella rappresentazione tabellare della relazione, questo significa che sono presenti gli elementi della diagonale.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *antiriflessiva* se, per *ogni* $a \in I$, vale $(a; a) \notin R$.

Cioè, una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà antiriflessiva (si dice anche "è antiriflessiva") se *nessun* elemento dell'insieme considerato è in relazione con se stesso. Nella rappresentazione tabellare, questo significa che non è presente alcun elemento della diagonale.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *simmetrica* se, per *ogni* $a \in I$ e per *ogni* $b \in I$ tali che $(a; b) \in R$, vale $(b; a) \in R$.

Cioè, una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà simmetrica (si dice anche "è simmetrica") quando, per *ogni* coppia di elementi *a* e *b* dell'insieme considerato, accade che, se *a* è in relazione con *b*, allora anche *b* è in relazione con *a*. Nella rappresentazione tabellare, questo significa che la matrice è simmetrica.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *antisimmetrica* se, per *ogni* $a, b \in I$, $(a; b) \in R$ e $(b; a) \in R$ implicano $a = b$.

Cioè, una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà antisimmetrica (si dice anche "è antisimmetrica") quando, per ogni coppia di elementi *a* e *b* dell'insieme considerato, il contemporaneo essere *a* in relazione con *b* e *b* in relazione con *a* implica che $a = b$.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *transitiva* se, per *ogni* $a \in I$, per *ogni* $b \in I$ e per *ogni* $c \in I$ tali che $(a; b) \in R$ e $(b; c) \in R$, vale $(a; c) \in R$.

Cioè, una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà transitiva (si dice anche "è transitiva") quando, per ogni terna di elementi *a*, *b* e *c* dell'insieme considerato, accade che, se *a* è in relazione con *b* e *b* è in relazione con *c*, allora *a* è in relazione con *c*.

Esempio. Consideriamo nell'insieme I delle rette del piano la $R \subseteq I \times I$:

$$R = \{(r; s): r \text{ è coincidente o parallela a } s\}$$

Tale relazione gode delle proprietà:

- *riflessiva*, perché ogni retta è coincidente o parallela a se stessa (nel caso specifico, coincidente);
- *simmetrica*, perché se la retta r è coincidente o parallela alla retta s, allora anche s è coincidente o parallela a r;
- *transitiva*, perché se la retta r è coincidente o parallela alla retta s e la retta s è coincidente o parallela alla retta t, allora la retta r risulta coincidente o parallela a t.

Il lettore verificherà che la relazione R non gode delle altre proprietà sopra esaminate (antiriflessiva, antisimmetrica).

Esempio. Consideriamo, nell'insieme J dei segmenti del piano, la S⊆J×J:

S = {(a; b): la lunghezza di a è non minore di quella di b}

Tale relazione gode delle proprietà:
- *riflessiva*, perché la lunghezza di ogni segmento è non minore di se stessa;
- *antisimmetrica*, perché se la lunghezza di un primo segmento è non minore della lunghezza di un secondo ed inoltre la lunghezza del secondo segmento è non minore di quella del primo, allora i due segmenti considerati hanno la stessa lunghezza;
- *transitiva*, perché se la lunghezza di un segmento a è non minore di quella di un segmento b e la lunghezza del segmento b è non minore di quella di un segmento c, allora la lunghezza di a è non minore di quella di b.

La relazione S non gode delle altre proprietà sopra esaminate (antiriflessiva, simmetrica).

Esempio. Consideriamo, nell'insieme I delle rette del piano, la T⊆I×I:

T = {(r; s): r è perpendicolare a s}

Tale relazione gode delle proprietà:
- *antiriflessiva*, perché nessuna retta è perpendicolare a se stessa;
- *simmetrica*, perché se una retta r è perpendicolare ad una retta s, allora la retta s è perpendicolare a r.

La relazione T non gode delle altre proprietà sopra esaminate (riflessiva, antisimmetrica, transitiva).

Data una relazione non transitiva R, si può sempre costruire una "minima" relazione transitiva che la contiene come insieme. La denoteremo con il termine *chiusura transitiva* di R, scritta $\underline{R}$. La chiusura transitiva di una relazione R può dunque essere intesa come l'intersezione di tutte le relazioni transitive che contengono R: così facendo, infatti, si otterrà una relazione $\underline{R}$ contenente R, transitiva e con la proprietà di essere la più piccola possibile, appunto perché intersezione di tutte quelle soddisfacenti i requisiti. Ne consegue che, per ogni relazione R, la chiusura transitiva esiste ed è unica.

Alternativamente, la chiusura transitiva $\underline{R}$ di una relazione R può essere costruita considerando tutte le coppie (x, x') che sono estremi di catene $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, x')$ di cui ogni coppia consecutiva $(x, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, x')$ appartiene ad R. Che tale relazione sia transitiva è chiaro: se (x, x') e (x', x'') appartengono ad $\underline{R}$, allora esisterà una successione $(x, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, x'), \ldots, (x_m, x'')$ che ci consentirà di affermare che anche $(x, x'')\in\underline{R}$. Inoltre ogni relazione transitiva che contenga R dovrà contenere tutte le coppie estremi di catene finite come quelle descritte.

Esempio. Consideriamo l'insieme X dei punti di una città (il termine "punto" si intenda, in questo caso, infomalmente, dunque più in senso "geografico" che geometrico). Sia A la relazione tra elementi di X individuata dalla proprietà "essere collegati da un autobus". Lasciamo al lettore il compito di verificare che essa è non riflessiva e simmetrica. Inoltre la relazione A non è transitiva in quanto può accadere che sia impossibile andare dal punto P al punto Q utilizzando un solo autobus pur potendo andare in questo modo da P a S e da S a Q.

Per costruire la chiusura transitiva $\underline{A}$, minima relazione transitiva contenente A, dobbiamo "ampliare" A considerando in relazione anche punti di X raggiungibili tra di loro mediante un certo numero (finito, anche se non fissato) di autobus da prendere uno di seguito all'altro: e questa è proprio l'operazione che comunemente viene fatta di chi utilzza i mezzi pubblici nel programmare uno spostamento.

2.4. Relazioni di equivalenza e insieme quoziente

Fin dall'antichità accanto all'operazione mentale di "raccolta di elementi" per formare un insieme, o classe, è stata considerata quella di "astrazione" rispetto a certe proprietà per formare individui di livello superiore. Ad esempio, se considero l'insieme degli animali, ma non mi interessano i singoli individui quanto, piuttosto, individui a meno di certe caratteristiche, posso procedere come segue: definisco una caratteristica importante (ad es. la possibilità di essere fecondi con prole feconda) e considero per me indifferenti due individui che siano indistinguibili rispetto a questa proprietà. A questo punto mi trovo a che fare non più con gli animali, ma con le specie di animali, cioè con entità più astratte.

Questo procedimento molto generale per costruire nuovi insiemi, può essere formalizzato introducendo il concetto di relazione di equivalenza, che permette di formulare la non-distinguibilità degli individui di un dato insieme.

Definizione. Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione di equivalenza* se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio. Consideriamo, nell'insieme I delle rette del piano, la relazione:

$$R = \{(r; s): r \text{ è coincidente o parallela a } s\}$$

già esaminata in un precedente esempio. La relazione data è una relazione di equivalenza in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definizione. Si dice *classe di equivalenza* $[a]$ dell'elemento $a \in I$ rispetto alla relazione di equivalenza $R \subseteq I \times I$ il sottoinsieme di I costituito dagli elementi x tali che $(a; x) \in R$.

Si noti che le classi di equivalenza sono non vuote (per la proprietà riflessiva delle relazioni di equivalenza, alla classe $[a]$ appartiene sempre l'elemento a) e a due a due disgiunte. Proviamo quest'ultima affermazione.

Proposizione. Siano a e b due elementi distinti di I, siano $[a]$ e $[b]$ le classi di equivalenza di a e di b rispetto alla relazione di equivalenza $R \subseteq I \times I$, e sia $[a] \neq [b]$; allora $[a]$ e $[b]$ sono disgiunte.

Dimostrazione. Mostreremo che se esiste un elemento $x \in I$ tale che $x \in [a]$ e $x \in [b]$, allora deve essere $[a] = [b]$. Infatti, per definizione, $x \in [a]$ significa che $(a; x) \in R$ e $x \in [b]$ significa che $(b; x) \in R$. Per la proprietà simmetrica e transitiva della relazione di equivalenza R, $(a; x) \in R$ e $(b; x) \in R$ implicano $(a; b) \in R$ e quindi $[a] = [b]$. ■

Definizione. Si dice *insieme quoziente* dell'insieme I rispetto alla relazione R l'insieme A/R delle classi di equivalenza degli elementi di I rispetto alla relazione di equivalenza R.

Esempio. Consideriamo, nell'insieme I delle rette del piano, la relazione di equivalenza:

$$R = \{(r; s): r \text{ è coincidente o parallela a s}\}$$

già esaminata in precedenti esempi. Le classi di equivalenza rispetto a tale relazione sono i sottoinsiemi di I del tipo:

$$[s] = \{r \in I: r \text{ è coincidente o parallela a } s\}$$

Ciascuno degli elementi dell'insieme quoziente I/R è costituito da un insieme di rette parallele: può essere identificato con la comune *direzione* di esse.

Di fatto l'uguaglianza di elementi in un insieme matematico è praticamente sempre definita attraverso una relazione di equivalenza ed un quoziente da un insieme meno astratto. Si pensi per esempio a come i numeri razionali **Q** vengano ottenuti dagli interi **Z** ed i reali **R** dai razionali **Q**.

2.5. Relazioni d'ordine

Introduciamo ora un'altra importante classe di relazioni.

Definizione. Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione d'ordine* (o *di ordine largo*) se gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Definizione. Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione di ordine stretto* se gode delle proprietà antiriflessiva e transitiva.

Esempio. Consideriamo nell'insieme J dei segmenti del piano la $S \subseteq J \times J$:

$$S = \{(a; b): \text{la lunghezza di } a \text{ è non minore di quella di } b\}$$

già esaminata in un precedente esempio. La relazione data è una relazione d'ordine (o di ordine largo) in quanto gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esempio. Consideriamo nell'insieme J dei segmenti del piano la $U \subseteq J \times J$:

$$U = \{(a; b)\text{: la lunghezza di } a \text{ è maggiore di quella di } b\}$$

La relazione data gode delle proprietà:
- *antiriflessiva*, perché nessun segmento può avere lunghezza maggiore della propria stessa lunghezza;
- *transitiva*, perché se un segmento *a* ha lunghezza maggiore di quella di un segmento *b* ed il segmento *b* ha lunghezza maggiore di quella di un segmento *c*, allora *a* ha lunghezza maggiore di *c*.

La relazione U è una relazione d'ordine stretto; inoltre, non gode delle altre proprietà esaminate nel paragrafo precedente.

Le relazioni d'ordine (largo o stretto) definite tra gli elementi di un insieme I servono a *confrontare* due elementi di I, stabilendo quale dei due elementi in questione preceda l'altro in una "classifica" basata sull'ordinamento indotto dalla relazione. Ad esempio, occupiamoci della relazione d'ordine largo S = {(a; b): la lunghezza di *a* è non minore di quella di *b*} introdotta sull'insieme J dei segmenti del piano, precedentemente esaminata: in base ad essa, è possibile "ordinare" l'insieme J rispetto alla lunghezza:
- se $(a; b) \in S$, allora *a* precede *b* nell'ordinamento
- se $(b; a) \in S$, allora *b* precede *a* nell'ordinamento

In tale caso, qualsiasi siano gli elementi *a* e *b* scelti in J, si verifica sempre *uno* dei due casi $(a; b) \in S$ o $(b; a) \in S$ (per segmenti non aventi la stessa lunghezza tali possibilità si escludono a vicenda): infatti, assegnati due segmenti *a* e *b*, accade sempre che
- la lunghezza di *a* è non minore di quella di *b*, oppure
- la lunghezza di *b* è non minore di quella di *a*

Ma accade *sempre* così? In altri termini: assegnata in un qualsiasi insieme una qualsiasi relazione d'ordine S, accade sempre che, detti *a* e *b* due qualsiasi elementi di tale insieme, si verifichi una delle due possibilità $(a; b) \in S$ o $(b; a) \in S$? Oppure può accadere che, per almeno una coppia di elementi *c* e *d* dell'insieme esaminato, risulti $(c; d) \notin S$ ed anche $(d; c) \notin S$? Queste ultime situazioni sono possibili: la distinzione ora presentata è collegata alla possibilità di confrontare tutte le coppie di elementi dell'insieme I in base alla relazione d'ordine assegnata in I e da ciò dipende la possibilità di ordinare tutti gli elementi di I in base a quanto considerato nella relazione.

Una relazione d'ordine S definita in un insieme I e tale che, per ogni coppia di elementi *a* e *b* di I si verifica sempre uno dei casi $(a; b) \in S$ o $(b; a) \in S$ (ovvero che consenta il confronto di tutte le coppie di elementi di I) si dice *relazione d'ordine totale*; una relazione d'ordine S che non per tutte le coppie consenta tale confronto, ovvero tale che per almeno una coppia di elementi *c* e *d* dell'insieme considerato accada che $(c; d) \notin S$ e che $(d; c) \notin S$, si dice *relazione d'ordine parziale*.

Osservazione. Il problema, ora presentato nel caso di una relazione d'ordine largo, si può estendere alle relazioni d'ordine stretto, come la U presentata nell'esempio precedente. Le possibilità, in quest'ultimo caso, non sono più due ma tre: ad $(a; b) \in U$ e $(b; a) \in U$, corrispondenti ai casi in cui la lunghezza di *a* è maggiore di quella di *b* e viceversa, deve essere aggiunto il caso in cui le lunghezze sono uguali.

Esempio. Sia I l'insieme avente per elementi tutti i sottoinsiemi di **R** (cioè l'insieme delle parti di **R**); definiamo la relazione $S \subseteq I \times I$:

$$S = \{(A; B): A \subseteq B\}$$

Tale relazione è una relazione d'ordine, in quanto gode delle proprietà:
- *riflessiva*, perché per ogni A è: $A \subseteq A$;
- *antisimmetrica*, perché da $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ segue $A = B$;
- *transitiva*, perché da $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ segue $A \subseteq C$.

La S è una relazione d'ordine parziale: infatti è possibile trovare coppie di sottoinsiemi C e D di **R** tali che $(C; D) \notin S$ e $(D; C) \notin S$. Ad esempio, se $C = \{x \in R: 0<x<2\}$ e $D = \{x \in R: 1<x<3\}$, non essendo $C \subseteq D$ né $D \subseteq C$, risulta $(C; D) \notin S$ e $(D; C) \notin S$.

Consideriamo ora un caso ancora meno rigido.

Esempio. Supponiamo di voler ordinare il popolo italiano in base al censo. Sappiamo benissimo introdurre una relazione $R \subseteq I \times I$ tra gli italiani dicendo che $(a; b) \in R$ se *a* non è più ricco di *b*. R è riflessiva e transitiva, ma non antisimmetrica, perché due italiani possono essere ugualmente ricchi senza essere la stessa persona. Possiamo allora introdurre una relazione di equivalenza $U \subseteq I \times I$ definita come segue:

$(a; b) \in U$ se *a* non è più ricco di *b* e *b* non è più ricco di *a*, cioè $(a; b) \in R$ e $(b; a) \in R$

A questo punto sull'insieme quoziente di I rispetto ad U, diciamo I', delle classi di reddito degli italiani, possiamo facilmente definire R' in modo analogo ad R ed ottenere una relazione d'ordine.

Definizione. Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione di preordine* se gode delle proprietà riflessiva e transitiva.

Proposizione. Data una relazione $R \subseteq I \times I$ *di preordine* si può definire un ordinamento corrispondente R' sull'insieme I', quoziente di I rispetto alla relazione di equivalenza $U = R \cap R^{-1}$.

3. FUNZIONI

3.1. La definizione di funzione

Tra le relazioni binarie, cioè su una coppia di insiemi, alcune hanno una particolare importanza. Le *funzioni* (o *applicazioni*) sono relazioni tra gli elementi di un insieme D e di un insieme B tali che ad ogni elemento dell'insieme D corrisponda esattamente un (ovvero, *uno ed uno solo*) elemento di B. In altre parole, una corrispondenza tra gli elementi di D e quelli di B è una funzione quando

- ogni elemento di D ha un corrispondente in B, e
- nessun elemento di D ha più di un corrispondente in B.

Definizione. Una relazione $R \subseteq D \times B$ si dice *funzione* (o *applicazione*) se per ogni $a \in D$ esiste *uno ed un solo* $b \in B$ tale che $(a; b) \in R$.

Osservazione. Se $f \subseteq D \times B$ è una funzione e se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, con $b_1 \neq b_2$, in base alla definizione data risulta che

$$\underline{\text{se}}\ \ (x; b_1) \in f\ \ \underline{\text{allora}}\ \ (x; b_2) \notin f$$
$$\underline{\text{se}}\ \ (x; b_2) \in f\ \ \underline{\text{allora}}\ \ (x; b_1) \notin f$$

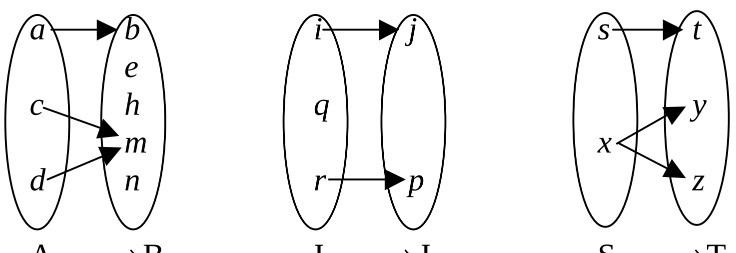
E' invece possibile che esistano $b \in B$, $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$, con $x_1 \neq x_2$ tali che $(x_1; b) \in f$ e $(x_2; b) \in f$.

Una funzione si indica spesso con la lettera f e si scrive $f \subseteq D \times B$ o f: $D \to B$; il primo insieme, D, si dice *dominio* della funzione f, il secondo, B, *codominio*. A ciascun elemento x del dominio della f corrisponde un'(unica) *immagine*, indicata da $f(x) \in B$, e si scrive f: $x \to f(x)$. Analogamente, si dice che $x \in D$ è *controimmagine* di $f(x) \in B$.

Definizione. Data la funzione f: $D \to B$, l'insieme $C \subseteq B$ costituito dalle immagini degli elementi di D si dice *insieme delle immagini* della f.

Pertanto l'insieme delle immagini della funzione f: $D \to B$ è quel sottoinsieme di B costituito dagli elementi di B aventi (almeno) una controimmagine in D.

Esempio. Consideriamo le relazioni rappresentate da:



La prima di esse è una funzione, mentre le altre due non rispettano la definizione di funzione. Infatti, in $R_1 \subseteq A \times B$, ad ogni elemento di A corrisponde una ed una sola immagine in B; l'insieme delle immagini della funzione R_1 è $C = \{b; m\}$. Nella relazione $R_2 \subseteq I \times J$, a $q \in I$ non corrisponde alcun elemento in J, contro la definizione di funzione. Nella relazione $R_3 \subseteq S \times T$, allo stesso elemento $x \in S$ corrispondono i distinti elementi $y \in T$ e $z \in T$, contro la definizione di funzione.

Esempio. Sia P l'insieme dei punti del piano e sia Z l'insieme delle circonferenze tracciate nel piano. Consideriamo le relazioni R⊆P×Z e S⊆Z×P:

R = {(p; z): il punto p∈P è il centro della circonferenza z∈Z}
S = {(z; p): la circonferenza z∈Z ha per centro il punto p∈P}

Esaminiamo la R: in essa, ad ogni punto p del piano corrispondono infinite circonferenze z, in quanto ogni punto può essere centro di infinite circonferenze (concentriche): la R non rispetta la definizione di funzione. Nel caso della S, invece, ad ogni circonferenza z corrisponde (in qualità di centro) uno ed un solo punto p: pertanto, la S è una funzione.

Osservazione. La definizione di funzione richiede che, per assegnare una funzione f: D→B, siano assegnati un insieme D, il dominio, un secondo insieme B al quale apparterranno le immagini, e una legge che ad ogni x∈D fa corrispondere una ed una sola $f(x)$∈B. Spesso, però, quando si considerano funzioni "*parziali*", cioè definite in un sottoinsieme D di **R** ed aventi immagini reali, una funzione f viene assegnata indicando la legge che ad ogni x∈D fa corrispondere la $f(x)$∈R, *senza fissare esplicitamente il dominio*; anzi, frequentemente la determinazione del dominio viene lasciata come esercizio. In questo caso, con il termine dominio si intende il più grande D⊆**R** tale che per ogni x∈D sia possibile calcolare $f(x)$∈**R**.

Esempio. Se la funzione f viene indicata con la scrittura:

$$f: x \to \sqrt{x}$$

allora il più grande D⊆**R** tale che per ogni x∈D sia possibile calcolare $\sqrt{x}\in\mathbf{R}$ è {x∈**R**: x≥ 0}. Dunque si dice che il dominio della $f: x \to \sqrt{x}$ è {x∈**R**: x≥0}.

Questo modo di procedere è spesso accettato: è però opportuno *specificare esplicitamente il dominio nei casi in cui possano sorgere malintesi*.

(Contro)esempio. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Qual è il dominio di questa funzione?

Se cerchiamo un dominio D⊆**R** affinché il denominatore sia non nullo e la radice quadrata sia reale, dobbiamo imporre la condizione: x>1.

Ma attenzione: a x = 0 (considerato come numero complesso) corrisponde $f(0) = \frac{0}{\sqrt{0-1}}$ = 0/i = 0 (dove $i = \sqrt{-1}$, i∈**C**; il lettore ricorderà dagli studi secondari che lo 0 complesso diviso per un complesso non nullo dà sempre come quoziente lo 0 complesso).

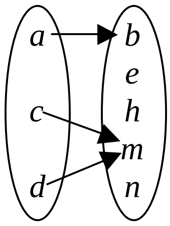
Abbiamo dunque visto che $f(0)$ = 0 (lo zero in **C**), e ciò potrebbe indurre a considerare 0 come appartenente al dominio di f; ma non si dimentichi che per eseguire il calcolo di $f(0)$ è necessario considerare lo 0 come elemento di **C** ed estrarre quindi (sempre in **C**) la radice quadrata di –1: e tutto ciò porta a *non* considerare 0 come appartenente al dominio di *f*.

In situazioni come quella ora descritta è evidentemente consigliabile precisare a priori il dominio in cui è definita la funzione, al fine di evitare ambiguità.

3.2. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Nel paragrafo precedente abbiamo dato la definizione di funzione: abbiamo cioè precisato che una relazione tra due insiemi è detta funzione quando ad ogni elemento del primo insieme (dominio) corrisponde una ed un sola immagine nel secondo insieme.

Riflettiamo ora su di una funzione già esaminata precedentemente:



$A \xrightarrow[R_1]{} B$

Dal suo esame, appare evidente che la definizione di funzione:

- *non* impone che due distinti elementi del dominio abbiano immagini distinte (ricordiamo l'osservazione posta dopo la definizione di funzione);
- *non* impone che tutti gli elementi del secondo insieme abbiano una controimmagine nel dominio (ovvero che l'insieme delle immagini della funzione coincida con l'intero secondo insieme).

Quelle (particolari) funzioni che rispettano una di queste due ulteriori condizioni (oppure entrambe) vengono indicate con denominazioni specifiche.

Definizione. La funzione *f*: D→B si dice *iniettiva* se per ogni $x_1 \in$ D e per ogni $x_2 \in$ D, con $x_1 \neq x_2$, e per ogni $b \in$ B, <u>se</u> $(x_1; b) \in f$ <u>allora</u> $(x_2; b) \notin f$.

Dunque una funzione *f*: D→B si dice iniettiva se ad *ogni* coppia di elementi *distinti* di D corrisponde una coppia di elementi *distinti* di B, ovvero se nessun elemento di B è dotato di più di una controimmagine in D.

Definizione. La funzione *f*: D→B si dice *suriettiva* se per ogni $b \in$ B esiste (almeno) un $x \in$ D tale che $(x; b) \in f$.

Dunque una funzione *f*: D→B si dice suriettiva se *ogni* elemento dell'insieme B ha (almeno) una controimmagine nel dominio ovvero se l'insieme delle immagini di *f* coincide con *tutto* l'insieme B.

Definizione. La funzione f: D$\to$B si dice *biiettiva* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Una funzione biiettiva viene talvolta indicata con i termini *biiezione* o *corrispondenza biunivoca*.

Esempio. La funzione R_1: A$\to$B introdotta in un precedente esempio non è iniettiva, in quanto ai due (distinti) elementi del dominio $c\in$A e $d\in$A corrisponde la stessa immagine m $\in$B. Essa non è suriettiva, in quanto gli elementi del secondo insieme $e\in$B, $h\in$B e $n\in$B non hanno alcuna controimmagine nel dominio A (cioè, l'insieme delle immagini della funzione, C = $\{b; m\}$, non coincide con tutto B). Non essendo iniettiva (né suriettiva), la funzione non è certamente biiettiva.

Esempio. Consideriamo la funzione S introdotta in un esempio precedente. Sia P l'insieme dei punti del piano e sia Z l'insieme delle circonferenze tracciate nel piano stesso. La relazione S$\subseteq$Z$\times$P:

S = $\{(z; p)$: la circonferenza $z\in$Z ha per centro il punto $p\in$P$\}$

rispetta la definizione di funzione; è iniettiva, suriettiva, biiettiva?

Essa non è iniettiva: esistono coppie di circonferenze distinte aventi lo stesso centro (concentriche). È suriettiva: ogni punto del piano è centro di (almeno) una circonferenza (di infinite circonferenze, ma la precisazione è ininfluente per quanto riguarda la suriettività). Non è biiettiva, non essendo iniettiva.

Esempio. Sia f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la funzione che ad ogni $x\in\mathbf{R}$ fa corrispondere il doppio di x, $2x\in\mathbf{R}$ (si verifichi innanzitutto per esercizio che essa rispetta la definizione di funzione). Si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva?

La risposta a tutte le domande è: sì.

La funzione f è iniettiva, in quanto ad ogni coppia di reali distinti corrispondono coppie di doppi distinti: se le immagini $2a$ e $2b$ coincidessero, non potrebbero che coincidere anche a e b. La funzione f è inoltre suriettiva, in quanto ogni elemento del secondo insieme ha una controimmagine nel dominio: ovvero ogni reale y è il doppio di un (opportuno) reale $y/2$. Essendo iniettiva e suriettiva, la funzione f è biiettiva.

3.3. La funzione composta

Consideriamo tre insiemi A, B e C, e le funzioni f: A$\to$B e g: B$\to$C. La f fa corrispondere ad ogni $a\in$A uno ed un solo $b\in$B; a tale elemento b, la g fa corrispondere uno ed un solo c $\in$C. Possiamo riassumere quanto detto nello schema

$$a \xrightarrow[f]{} b \xrightarrow[g]{} c$$

ovvero, con riferimento all'elemento $a\in$A da cui trae origine la corrispondenza,

$$a \xrightarrow[f]{} f(a) \xrightarrow[g]{} g[f(a)]$$

È possibile considerare una *nuova* funzione che faccia direttamente corrispondere all'elemento $a \in \mathrm{A}$ l'elemento $g[f(a)] \in \mathrm{C}$. Essa è denominata funzione *composta* delle due funzioni considerate e si indica con la scrittura $g \bullet f$ oppure $g\,f$.

Attenzione: per convenzione, *si indica per prima la funzione che opera per ultima*! Ciò viene scelto in analogia con la scrittura $g[f(a)]$ dell'elemento corrispondente di a nella funzione composta $g \bullet f$.

Definizione. Date le funzioni f: A→B e g: B→C, si dice *funzione composta* $g \bullet f$ la funzione che ad ogni elemento $a \in \mathrm{A}$ fa corrispondere l'elemento $g[f(a)] \in \mathrm{C}$.

Esempio. Siano date le funzioni f: **R**→**R** e g: **R**→**R** definite da:

$$f: x \to 3x \qquad g: x \to x+2$$

Determiniamo le funzioni composte $f \bullet g$ e $g \bullet f$. Ricordiamo che, nelle funzioni composte, la funzione componente ad operare per prima è quella scritta per seconda. Iniziamo quindi con il ricavo dell'espressione di $f \bullet g$:

$$f \bullet g: x \xrightarrow[g]{} x+2 \xrightarrow[f]{} 3(x+2)$$

Osserviamo che la f, che all'elemento del dominio fa corrispondere il suo triplo, non opera sulla x, bensì sull'elemento $(x+2)$, già trasformato dalla precedente azione della funzione g. Per quanto riguarda la $g \bullet f$, otteniamo:

$$g \bullet f: x \xrightarrow[f]{} 3x \xrightarrow[g]{} 3x+2$$

Le due funzioni composte richieste sono quindi:

$$f \bullet g: x \to 3x+6 \qquad g \bullet f: x \to 3x+2$$

Confrontando le funzioni $f \bullet g$ e $g \bullet f$ ricavate nell'esempio precedente, possiamo notare che la composizione di funzioni *non gode della proprietà commutativa*. Si verifica invece che la composizione di funzioni *gode della proprietà associativa*; ovvero, assegnate le tre funzioni f, g e h, risulta $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$.

Proposizione. Se $g \bullet f$ è definita e sia g che f sono iniettive (rispettivamente suriettive o biunivoche), allora anche $g \bullet f$ è iniettiva (rispettivamente suriettiva o biunivoca).

3.4. Le funzioni parziali

La definizione di composizione di funzioni stabilisce che, date le funzioni f: A→B e g: B→C, si dica funzione composta $g \bullet f$ la funzione che ad ogni elemento $a \in \mathrm{A}$ fa corrispondere l'elemento $g[f(a)] \in \mathrm{C}$. Nel caso di funzioni parziali l'applicabilità di tale definizione richiede cautela. Non sempre, infatti, due funzioni parziali, f: A$\to$B e g: B$\to$C, saranno tali che l'insieme delle immagini di f (che essendo f: A$\to$B è un sottoinsieme di B) sia incluso nel dominio (l'insieme B) di g.

(Contro)esempio. Siano date le funzioni f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ e g: $D_g\to\mathbf{R}$, essendo $D_g = \{x\in\mathbf{R}: x \geq 1\}$:

$$f: x\to x^2 \qquad\qquad g: x\to\sqrt{x-1}$$

Vogliamo considerare la composta $g\bullet f$; teniamo però presente che l'insieme delle immagini di f: $C_f = \{x\in\mathbf{R}: x\geq 0\}$ *non* è un sottoinsieme del dominio di g, $D_g = \{x\in\mathbf{R}: x\geq 1\}$: l'applicazione della definizione richiede alcune precisazioni.

Quanto esposto nel precedente esempio conferma che l'applicabilità della definizione può richiedere qualche modifica della situazione proposta. Il problema è far sì che l'insieme delle immagini di f sia un sottoinsieme del dominio di g. A tale scopo, dobbiamo effettuare la composizione *non* tra f: D$\to\mathbf{R}$ con insieme delle immagini D e g: $D_g\to$C, bensì tra f_0: $D_0\to\mathbf{R}$ con insieme delle immagini C_0 e g, essendo f_0 una funzione definita dalla *stessa* legge che definisce la f, ma *ristretta ad un dominio* $D_0\subset D$, in modo tale che l'insieme delle immagini di f_0 sia un sottoinsieme del dominio di g. Sceglieremo f_0: $D_0\to\mathbf{R}$ con insieme delle immagini C_0 in modo che D_0 sia il massimo dominio possibile tale che $C_0\subseteq D_g$. La funzione f_0: $D_0\to\mathbf{R}$ si dice *restrizione* della funzione f: D$\to\mathbf{R}$, con $D_0\subseteq D$.

Esempio. Siano date le funzioni f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, g: $D_g\to\mathbf{R}$, con $D_g = \{x\in\mathbf{R}: x \geq 1\}$:

$$f: x\to x^2 \qquad\qquad g: x\to\sqrt{x-1}$$

come nell'esempio precedente. Per definire $g\bullet f$, restringiamo prima la funzione

$$f: x\to x^2 \qquad\qquad f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \text{ con insieme delle immagini } \{x\in\mathbf{R}: x\geq 0\}$$

(che non è un sottoinsieme di $D_g = \{x\in\mathbf{R}: x\geq 1\}$) alla funzione

f_0: $x\to x^2$
f_0: $\{x\in\mathbf{R}: x\leq -1 \vee x\geq 1\}\to\mathbf{R}$ con insieme delle immagini $\{x\in\mathbf{R}: x\geq 1\}$

che *è* un sottoinsieme (improprio) di $D_g = \{x\in\mathbf{R}: x\geq 1\}$. La definizione è ora applicabile e la funzione composta richiesta è:

$$g\bullet f: x\to\sqrt{x^2-1}$$

Il suo dominio è: $\{x\in\mathbf{R}: x\leq -1 \text{ o } x\geq 1\}$.

Osservazione. Non sempre i passaggi indicati nel presente paragrafo (la restrizione della prima funzione che opera in una composizione di funzioni) vengono esplicitamente espressi in esercizi ed in applicazioni. Talvolta, cioè, per trovare la funzione composta $g\bullet f$ date le f: $x\to x^2$ e g: $x\to\sqrt{x-1}$, ci si limita a scrivere

$$g \bullet f : x \to \sqrt{x^2 - 1}$$

sottintendendo che il dominio è $\{x \in \mathbf{R}: x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\}$.

È necessario, nel caso di funzioni parziali, prestare attenzione alla determinazione del dominio della funzione composta, questione che, in alcuni casi, può rivelarsi assai delicata. Infatti, non sempre i domini (e gli insiemi delle immagini) di entrambe le funzioni componenti vengono indicati esplicitamente. Ciò potrebbe talvolta portare a situazioni problematiche: come abbiamo rilevato nel precedente paragrafo, affinché ad un elemento $a \in$ A corrisponda un elemento $g[f(a)]$ attraverso la funzione composta, è necessario che l'immagine di a attraverso la funzione f, $f(a)$, appartenga al dominio della funzione g. Ebbene, se questo dominio è indicato esplicitamente, il controllo è immediato; ma nell'esempio seguente illustreremo un caso in cui è richiesta una qualche cautela.

(Contro)esempio. Siano date le funzioni f: D$\to\mathbf{R}$ (dove D$\subseteq\mathbf{R}$) e g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite da:

$$f : x \to \sqrt{x} \qquad g : x \to (-1-x^2)$$

Determiniamo (se possibile) la funzione composta $f \bullet g$.

Il dominio della funzione f (che è la funzione che, essendo scritta per prima in $f \bullet g$, opera per seconda) è $D_f = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$, in quanto la radice quadrata non è calcolabile nei reali per radicandi negativi. Notiamo inoltre che l'insieme delle immagini della g (che opera per prima) è $C_g = \{x \in \mathbf{R}: x \leq -1\}$, in quanto, per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta $-1-x^2 \leq -1$.

Concludendo: l'insieme delle immagini della funzione che opera per prima è costituito dai reali non maggiori di -1; il dominio della funzione che opera per seconda è costituito dai reali non negativi. Pertanto tale dominio e tale insieme delle immagini sono disgiunti, e nessun elemento x del dominio della g che opera per prima avrà immagine appartenente al dominio della f che opera per seconda: quindi nessun elemento x avrà immagine nella funzione composta $f \bullet g$.

Quanto affermato può essere confermato dal ricavo (inutile) dell'espressione analitica della funzione composta $f \bullet g$:

$$f \bullet g : x \xrightarrow[g]{} (-1-x^2) \xrightarrow[f]{} \sqrt{-1-x^2}$$

Al lettore il semplice compito di verificare che il dominio di $f \bullet g$ sarebbe $\varnothing$ (nell'ambito dei numeri reali).

Generalizzando quanto osservato nell'esempio precedente, possiamo ribadire che, nel caso di funzioni parziali, il dominio di $f \bullet g$ non coincide necessariamente con il dominio di g e, affinché la funzione composta $f \bullet g$ abbia dominio non vuoto, è necessario e sufficiente che l'insieme delle immagini di g, C_g, e il dominio di f, D_f, non siano disgiunti, ovvero che sia $D_f \cap C_g \neq \varnothing$.

3.5. La funzione identità e la funzione inversa

Definizione. Dato un insieme I, si dice *identità* e si indica con i la funzione di I$\times$I che ad ogni elemento $a \in$ I associa se stesso: $i = \{(a; a): a \in \mathrm{I}\}$.

Lasciamo al lettore il compito di rendersi conto che la i così introdotta è una funzione biiettiva. Considerata la funzione (qualsiasi) f: A→B, si verifica che:

$$f \bullet i = i \bullet f = f$$

Spesso è richiesto di determinare la relazione inversa di una funzione espressa nella forma $x \rightarrow f(x)$. Nell'esempio seguente è illustrato il procedimento per ricavare l'espressione della relazione inversa di una funzione data.

Esempio. Consideriamo la funzione f: **R**→**R** definita da:

$$f: x \rightarrow 2x - 3$$

Ricaviamo l'espressione della relazione inversa.

Indichiamo con $y = 2x-3$ l'immagine dell'elemento x. La data relazione si indica ora con la scrittura:

$$(x; y) \in f$$

Per ricavare la cercata espressione della relazione inversa, in base alla definizione, dobbiamo ottenere una scrittura del tipo:

$$(y; x) \in f^{-1}$$

ovvero "scambiare" le posizioni ed i ruoli di x e y. Nel passaggio dalla funzione data alla sua relazione inversa, l'espressione $y = 2x-3$ diventerà quindi $x = 2y-3$, dalla quale, esplicitando la y, ricaviamo:

$$y = \frac{x+3}{2}$$

che è l'immagine di x nella relazione inversa.

Pertanto possiamo affermare che la relazione inversa della funzione data è espressa dalla (nuova) funzione:

$$f^{-1}: x \rightarrow \frac{x+3}{2}$$

Osservazione. Concludiamo notando che nel caso esaminato nell'esempio precedente, la relazione inversa della funzione f è un'altra funzione (cioè è una relazione tale da rispettare la definizione di funzione). Ma non sempre accadrà ciò. Nei due esempi seguenti esaminiamo due diverse situazioni: nella prima, la relazione inversa di una funzione data è ancora una funzione; nella seconda, ciò non accade: la relazione inversa della funzione proposta non rispetta la definizione di funzione.

Esempio. Si consideri la funzione f: **R**→**R** definita da:

$$f: x \to 2x$$

si ricavi l'espressione della relazione inversa e si dica se tale relazione rispetta la definizione di funzione.

La relazione inversa della funzione che ad ogni x fa corrispondere il suo doppio è quella che ad ogni x fa corrispondere la sua metà. Ovvero:

$$f^{-1} : x \to x/2$$

Non è difficile rendersi conto che questa relazione rispetta la definizione di funzione: ad ogni x reale corrisponde infatti una ed una sola metà $x/2$.

(Contro)esempio. Si consideri la funzione g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da:

$$g: x \to x^2$$

si ricavi l'espressione della relazione inversa e si dica se tale relazione rispetta la definizione di funzione.

In questo caso, la situazione è più delicata: infatti la relazione inversa associa ad ogni elemento *non negativo* la sua radice quadrata, ma sia con il segno "+" che con il segno "–". Insomma, se $g = \{(x; x^2): x\in\mathbf{R}\}$ allora $g^{-1} = \{(x^2; x): x\in\mathbf{R}\}$; da ciò risulta, per esempio, che $(9; 3)\in g^{-1}$ ma anche $(9; -3)\in g^{-1}$.

Possiamo concludere che questa relazione inversa *non* rispetta la definizione di funzione. E ciò per ben due ragioni: primo, non per tutti i numeri reali è possibile calcolare (reale) la radice quadrata (ma soltanto per i reali non negativi); in secondo luogo, per ogni reale positivo x, esistono due reali (e non uno solo) che elevati al quadrato danno come risultato x: essi sono $+\sqrt{x}$ e $-\sqrt{x}$.

Abbiamo constatato che in alcuni casi la relazione inversa di una funzione è ancora una funzione, mentre in alcuni casi non lo è. Ebbene, perché accade ciò? Quali caratteristiche deve avere una funzione affinché anche la sua relazione inversa rispetti la definizione di funzione? Non è difficile rispondere a questa domanda, se si tiene presente quanto richiesto dalla stessa definizione di funzione: affinché una relazione tra due insiemi sia una funzione bisogna che ogni elemento del primo insieme (dominio) abbia una ed una sola immagine.

Ricordiamo che l'inversione di una relazione comporta lo scambio dei due insiemi: il dominio diventa il codominio e viceversa. Quindi, per stabilire se la relazione inversa rispetta la definizione di funzione dobbiamo esaminare:

- se ogni elemento del dominio (nella relazione inversa) è dotato di almeno una immagine. Ovvero, se ogni elemento del codominio (nella relazione originaria) è dotato di almeno una controimmagine. Pertanto, la funzione originaria deve essere *suriettiva*.
- se ogni elemento del dominio (nella relazione inversa) è dotato di una sola immagine. Ovvero, se ogni elemento del codominio (nella relazione originaria) è dotato di una sola controimmagine. Pertanto, la funzione originaria deve essere *iniettiva*.

Possiamo concludere che le condizioni affinché la relazione inversa di una funzione f rispetti la definizione di funzione sono l'iniettività e la suriettività della funzione originaria f: tale funzione, quindi, deve essere *biiettiva*.

Definizione. Una funzione si dice *invertibile* quando anche la sua relazione inversa rispetta la definizione di funzione.

Proposizione. Una funzione è *invertibile* se e soltanto se è *biiettiva*.

Dunque si identifica una funzione biiettiva f: $A \to B$ in una relazione che ad *ogni* elemento di A fa corrispondere *uno ed un solo* elemento di B *e viceversa*.

Ricordando la definizione di identità e indicate una funzione invertibile e la propria funzione inversa rispettivamente con f e f^{-1}, è semplice ricavare:

$$f \bullet f^{-1} = i$$
$$f^{-1} \bullet f = i$$

dove, però, nel primo caso si tratta dell'identità del codominio di f, nel secondo di quella del dominio.

4. CARDINALITA' DI UN INSIEME

4.1. Equipotenza di insiemi

Definizione. Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* se sono in corrispondenza biunivoca, cioè quando esiste una funzione biiettiva di dominio A ed insieme delle immagini B.

Esempio. Considerato un triangolo qualsiasi, l'insieme A dei suoi lati e l'insieme B delle sue mediane sono equipotenti.

Per verificare tale affermazione è sufficiente considerare la relazione $R \subseteq A \times B$ che ad ogni lato $a \in A$ fa corrispondere la mediana $b \in B$ avente per estremi il vertice opposto al lato a ed il punto medio dello stesso lato a.

La relazione R è una funzione: infatti, ad ogni lato del triangolo corrisponde, nella relazione introdotta, una ed una sola mediana. Questa funzione è inoltre suriettiva, giacché ogni mediana è corrispondente, nella R, di un lato (quello avente come punto medio l'estremo della mediana non coincidente con un vertice del triangolo); è inoltre iniettiva, in quanto a due lati distinti corrispondono due distinte mediane (i loro estremi non coincidenti con un vertice sono i punti medi di due lati distinti): R è una funzione biiettiva.

In base alla definizione concludiamo che A e B sono equipotenti.

(Contro)esempio. L'insieme $I = \{0; 1\}$ e l'insieme $J = \{10; 11; 12\}$ *non* sono equipotenti. Se consideriamo, ad esempio, la funzione f: $I \to J$ definita da:

$x \to x+10$

ci rendiamo conto che è una funzione iniettiva ma *non* suriettiva (il suo insieme delle immagini è {10; 11} e *non* coincide con l'intero J), quindi *non* biiettiva.

Non esiste alcuna funzione biiettiva I→J, poichè ogni funzione da I a J non può essere suriettiva (altrimenti dovrebbe associare due immagini allo stesso elemento del dominio e non sarebbe, quindi, una funzione). Gli insiemi I e J non sono dunque equipotenti.

Nel seguito considereremo gli insiemi di cui ci siamo finora occupati (ed altri insiemi che possiamo immaginare) come elementi di un insieme U. Importanti motivazioni ci impediscono però assolutamente di parlare di "insieme costituito da *tutti* gli insiemi": dunque, l'insieme U dovrà essere considerato soltanto un insieme al quale appartengono, come elementi, altri insiemi, senza alcuna pretesa di totalità (v. il successivo paragrafo).

Definiamo in U la relazione di equipotenza, precedentemente introdotta. Verificheremo che essa è una relazione di equivalenza, cioè che è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Proposizione. La relazione di equipotenza tra insiemi è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Verifichiamo direttamente le tre proprietà della relazione di equivalenza.

- La relazione di equipotenza tra insiemi è *riflessiva*. Infatti, ogni insieme I∈U è equipotente a se stesso: si consideri, a tale riguardo, l'identità, ovvero quella relazione che ad ogni elemento di x∈I fa corrispondere x stesso. È semplice verificare che si tratta di una funzione biiettiva (il lettore può farlo, per esercizio): conseguentemente, in base alla definizione 1, ogni insieme I risulta equipotente a se stesso.
- La relazione di equipotenza tra insiemi è *simmetrica*. Infatti, se I∈U è equipotente a J∈U, significa (per definizione) che esiste una funzione biiettiva f: I→J; essendo f biiettiva, f risulta invertibile, e la funzione inversa è f^{-1}: J→I, anch'essa biiettiva (ad ogni elemento di J fa corrispondere uno ed un solo elemento di I e viceversa). Pertanto, anche J è equipotente ad I (per la definizione).
- La relazione di equipotenza tra insiemi è *transitiva*. Infatti, se I∈U è equipotente a J ∈U ed inoltre J∈U è equipotente a L∈U, significa (per definizione) che esistono due funzioni biiettive f: I→J e g: J→L. Consideriamo la funzione composta $g \bullet f$: I→L: anch'essa è biiettiva (ad ogni elemento di I fa corrispondere uno ed un solo elemento di L e viceversa). Pertanto, anche I è equipotente a L. ■

Ripercorreremo, in questo paragrafo, la costruzione dell'insieme quoziente. Dovremo inizialmente sviluppare tale procedimento nell'ambito degli insiemi *finiti*; escluderemo quindi dalle nostre considerazioni, in questa prima fase, gli insiemi *infiniti*, dei quali ci occuperemo specificamente in seguito.

L'introduzione dei concetti di insieme finito e di insieme infinito si basa su di una constatazione: in molti casi, un insieme non è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Il lettore può rendersi conto di ciò verificando direttamente tale impossibilità: ad esempio, non si può definire alcuna funzione biiettiva f: A→B, essendo A = {0; 1} e B il suo sottoinsieme proprio {1}.

Questo comportamento, però, non è caratteristico di *tutti* gli insiemi: esistono infatti insiemi che sono equipotenti ad alcuni loro sottoinsiemi propri.

(Contro)esempio. Consideriamo l'insieme P = {0; 2; 4; 6; 8; ...} dei numeri naturali *pari* (considerando pari anche lo zero) ed il suo sottoinsieme I = {2; 4; 6; 8; ...} dei numeri naturali *pari e diversi da zero*. Mostreremo che, sebbene I sia un sottoinsieme *proprio* di P, i due insiemi P e I sono equipotenti.

Consideriamo infatti la funzione f: P→I così definita:

$$f: x \mapsto x+2$$

Tale funzione è biiettiva: ad ogni $x \in$ P corrisponde, infatti, attraverso la funzione f, uno ed un solo $x+2 \in$ I; viceversa, ad ogni elemento di I corrisponde uno ed un solo elemento di P attraverso la funzione inversa:

$$f^{-1}: x \mapsto x-2$$

Pertanto P ed I sono equipotenti. Sottolineiamo ancora che I è un sottoinsieme *proprio* di P: infatti è P\I = {0} ≠ ∅.

Le definizioni di insieme finito e di insieme infinito si baseranno proprio sui due diversi comportamenti ora illustrati: in particolare, diremo finito ogni insieme che si comporterà analogamente a {0; 1}, diremo infinito ogni insieme che si comporterà analogamente a P. Possiamo dunque formalizzare quanto sopra introdotto nella seguente definizione.

Definizione. Un insieme si dice *infinito* se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Un insieme si dice *finito* se non è equipotente ad alcun suo sottoinsieme proprio.

Come sopra anticipato, concentriamo la nostra attenzione, in un primo momento, sugli insiemi *finiti*. Se indichiamo, come già sopra fatto, con U una famiglia avente per elementi insiemi (finiti ed infiniti), possiamo indicare con $U_f \subseteq U$ una famiglia avente per elementi (soltanto) insiemi *finiti*. In U_f consideriamo la relazione di equipotenza tra insiemi: la dimostrazione della Proposizione precedente (inizialmente formulata nel caso di insiemi qualsiasi) assicura che tale relazione è una relazione di equivalenza.

La cercata introduzione dell'insieme **N** è ora assai semplice: consideriamo infatti le classi di equivalenza determinate in U_f dalla relazione di equipotenza; e consideriamo, infine, l'insieme quoziente avente tali classi di equivalenza come elementi. Non è difficile identificare ciascuna di tali classi di equivalenza con un numero naturale *n* (intuitivamente, il numero *n* degli elementi appartenenti a ciascuno degli insiemi della classe di equivalenza); si dice che ogni elemento appartenente alla classe di equivalenza in questione ha *potenza* (o *cardinalità*) *n*. L'insieme quoziente può dunque essere interpretato come l'insieme **N** dei numeri naturali.

Il naturale "zero" è dunque identificabile con la classe di equivalenza avente quale unico elemento l'insieme vuoto; potremo dire che l'insieme vuoto ha potenza 0.

Esempio. Il numero naturale 2 si identifica con la classe di equivalenza (riferita alla relazione di equipotenza tra insiemi) alla quale appartiene l'insieme I = {0; 1} e pertanto

anche tutti gli insiemi ad esso equipotenti (l'insieme delle lenti di un comune paio di occhiali, l'insieme delle ruote di una bicicletta etc.).
Ogni insieme appartenente alla classe di equivalenza sopra indicata ha potenza 2.

Indichiamo con #I il cardinale di un insieme I che identificherà la famiglia degli insiemi J equipotenti con I. Ad esempio, se:

A = {3; 7}   B = {α; β}   C = {♥; ♠}

possiamo scrivere:

#A = #B = #C

Se #D ≤ #E significa che D è equipotente ad un sottoinsieme di E.

4.2. La potenza del numerabile

Il concetto di equipotenza ha consentito di formulare una definizione di insieme infinito; finora, però, non sono stati trattati gli insiemi infiniti: abbiamo introdotto informalmente **N** considerando le classi di equivalenza determinate, in un insieme U_f costituito da insiemi finiti, dalla relazione di equipotenza. Ora ci occuperemo invece specificamente degli insiemi *infiniti*: dato che la relazione di equipotenza è definita anche per questi insiemi, si presenta il problema di estendere il concetto di potenza di un insieme anche agli insiemi infiniti. E la potenza di tali insiemi, per quanto visto, non potrà essere data da un naturale: dovremo quindi utilizzare denominazioni nuove.

A tale riguardo, sorge però un problema: possiamo affermare che tutti gli insiemi infiniti hanno la *stessa* potenza? Sarebbe corretto, ad esempio, concludere che la potenza di insiemi come **N**, **Z**, **Q**, **R** è "infinito", senza ulteriori specificazioni? Come vedremo, infatti, una delle massime conquiste della teoria degli insiemi di Georg Cantor sarà proprio identificabile in questa inedita possibilità di "confrontare" (di "classificare") gli insiemi infiniti.

Dimostriamo che l'insieme **N** dei numeri naturali è un insieme infinito. Per fare ciò, proveremo che **N** è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

Proposizione. L'insieme $P \subseteq \mathbf{N}$ dei numeri naturali pari è equipotente a **N**.

Dimostrazione. Sia P l'insieme dei numeri naturali pari:

$$P = \{m \in \mathbf{N}\colon m = 2 \cdot n \text{ e } n \in \mathbf{N}\}$$

Per dimostrare che P, sottoinsieme proprio di **N**, è equipotente a **N**, è necessario individuare una funzione biiettiva f: P→**N**. Tale funzione è f: $x \to x/2$.

Mostriamo ora che f è biiettiva (ovvero che P e **N** sono posti, attraverso f, in corrispondenza biunivoca): rappresentiamo tale relazione nel modo seguente:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \ldots & & (\mathrm{P}) \\
f & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & & \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & & (\mathbf{N})
\end{array}
$$

Ad ogni elemento di P corrisponde dunque uno ed un solo elemento di **N** e viceversa e ciò prova quanto affermato. ■

Possiamo ora introdurre una specifica denominazione per la potenza di tutti quegli insiemi che (come P) sono equipotenti a **N**.

Definizione. Un insieme equipotente a **N** si dice avente la *potenza del numerabile*.

L'insieme $\mathrm{P}\subseteq\mathbf{N}$ dei naturali pari ha dunque la potenza del numerabile. La prossima proposizione darà un importante esempio di insieme equipotente a **N**.

Proposizione. L'insieme **Z** ha la potenza del numerabile.

Dimostrazione. Per dimostrare che **Z** ha la potenza del numerabile dobbiamo dimostrare che **Z** è equipotente a **N**, ovvero individuare una funzione biiettiva g: $\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$. Tale funzione è così rappresentata schematicamente:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \ldots & & (\mathbf{Z}) \\
g & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & & \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & & (\mathbf{N})
\end{array}
$$

Dunque:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{N} & \to & \mathbf{Z} \\
 & & \\
0 & \leftrightarrow & 0 \\
2n+1 & \leftrightarrow & n+1 \\
2n & \leftrightarrow & -n
\end{array}
$$

Ad ogni elemento di **Z** corrisponde dunque uno ed un solo elemento di **N** e viceversa. ■

Quanto stabilito da queste due proposizioni potrebbe apparire sorprendente: un'interpretazione eccessivamente libera ed "intuitiva" del problema potrebbe infatti suggerire conclusioni ben diverse sulla "quantità" di elementi appartenenti agli insiemi esaminati. Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali pari potrebbe sembrare costituito dalla "metà" degli elementi appartenenti all'insieme **Z**; analogamente, l'insieme **Z** potrebbe sembrare costituito dal "doppio" degli elementi appartenenti a **N**. Invece queste ultime "constatazioni", nonostante la loro apparente plausibilità, non hanno alcun significato, in matematica: i tre insiemi **N**, l'insieme P dei naturali pari e **Z** sono equipotenti.

Occupiamoci ora dell'insieme **Q** dei razionali. Intuitivamente, se confrontato con l'insieme dei numeri interi, **Q** appare costituito da "moltissimi" elementi; potrebbe sembrare, a prima vista, che i razionali siano "molto più numerosi" dei naturali (e degli interi): ad esempio tra due naturali stanno infiniti razionali!

Esempio. Proveremo che, dati due razionali a e b, con $a<b$, esiste sempre un razionale q tale che $a<q<b$. Dall'ipotesi $a<b$ possiamo trarre:

$$a+a < a+b \quad \text{e} \quad a+b < b+b$$
$$2\cdot a < a+b \quad \text{e} \quad a+b < 2\cdot b$$
$$2\cdot a < a+b < 2\cdot b$$

e infine:

$$a < \frac{1}{2}\cdot(a+b) < b$$

Pertanto la frazione $\frac{1}{2}\cdot(a+b)$ è il numero razionale cercato.

Le considerazioni sino ad ora esposte potrebbero intuitivamente far supporre che l'insieme **Q** sia "molto più numeroso" dell'insieme **N**. Eppure...

Proposizione. L'insieme **Q** ha la potenza del numerabile.

Dimostrazione. Analogamente a quanto proposto nelle dimostrazioni precedenti, dobbiamo "allineare" in un'unica fila tutti gli elementi di **Q**: fatto ciò, sarà possibile mettere in corrispondenza biunivoca gli elementi di **Q** e quelli di **N**.

Scriviamo gli elementi di $\mathbf{Q}^+$ (le frazioni positive) nella tabella seguente:

• 1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...	
	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	...
	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	...
	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	...
	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	...
	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	...
	...	...	...	...	...	...	...

Grazie a questa tabella, possiamo scrivere una "fila" di razionali:

- scriviamo innanzitutto l'elemento 0 (non compreso nella tabella), che sarà il primo elemento della "fila";
- partiamo dall'elemento 1/1 (che si trova, nella tabella, in alto a sinistra);
- "percorriamo" la tabella procedendo a zig-zag, ovvero secondo una serpentina che, da 1/1, individua successivamente:

1/1 1/2 2/1 3/1 2/2 1/3 1/4 2/3 3/2 4/1...

- consideriamo esclusivamente le frazioni, tra quelle così individuate, che non risultano equivalenti ad una frazione già considerata; ad esempio, una volta accettato l'elemento 1/1, dobbiamo trascurare 2/2, 3/3, 4/4... (frazioni che sono tutte equivalenti a 1/1);
- nella "fila" di elementi di **Q**, dopo 0, per ciascuna delle frazioni m/n così individuate, scriviamo sia la frazione positiva, $+m/n$, che la frazione negativa, ovvero $-m/n$.

Otteniamo, pertanto, quanto inizialmente ricercato: l'intero insieme **Q** (giacché *tutti* i razionali compaiono nella tabella sopra considerata!) risulta ordinato nella "fila" precedente; **Q** può quindi essere messo in corrispondenza biunivoca con **N** mediante la funzione biiettiva h: $\mathbf{Q}\to\mathbf{N}$ rappresentata da:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 0 & +1/1 & -1/1 & +1/2 & -1/2 & +2/1 & -2/1 & +3/1 & \ldots & (\mathbf{Q}) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ h & | & | & | & | & | & | & | & | & \ldots & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & (\mathbf{N}) \end{array}$$

Ad ogni elemento di **Q** corrisponde dunque uno ed un solo elemento di **N** e viceversa. ■

In conclusione, abbiamo verificato che **N** e tutti gli altri insiemi infiniti considerati (l'insieme dei naturali pari, **Z** e **Q**) hanno la potenza del numerabile.

4.3. La potenza del continuo

Quanto affermato nel paragrafo precedente propone una questione centrale: *tutti* gli insiemi infiniti hanno la potenza del numerabile? La risposta è: *no*. La proposizione seguente, dovuta a Cantor, motiva questa risposta.

Proposizione. L'insieme **R** *non* ha la potenza del numerabile.

Dimostrazione. Ammettiamo, per assurdo, che **R** abbia la potenza del numerabile: dovrebbe allora essere possibile, analogamente a quanto fatto nelle dimostrazioni precedenti, "allineare" in un'unica fila tutti gli elementi di **R**. Inizieremo a scrivere questa fila elencando tutti i reali x con $0<x<1$ scritti in forma decimale (per evitare ogni malinteso, possiamo scegliere di non considerare successioni costituite, da un certo punto in poi, da una fila illimitata di sole cifre 9: com'è noto, ad esempio, 0, 74999999… è 0,75 e in quest'ultima rappresentazione, dopo la cifra 5, segue un'illimitata sequenza di cifre 0):

$x_1 = 0,a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9...$
$x_2 = 0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9...$
$x_3 = 0,c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9...$
$x_4 = 0,d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9...$
$x_5 = 0,e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9...$ etc.

Ogni allineamento decimale può essere illimitato o limitato (nel qual caso, come sopra accennato, può essere considerato seguito da un'illimitata fila di zeri). Dimostreremo che una *qualsiasi* "fila" come quella sopra indicata *non* può contenere tutti i reali compresi tra 0 e 1. Infatti, consideriamo il reale α:

$$\alpha = 0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7...$$

tale che sia:

$$\lambda_1 \neq a_1 \quad \lambda_2 \neq b_2 \quad \lambda_3 \neq c_3 \quad \lambda_4 \neq d_4 \quad \lambda_5 \neq e_5 \quad \lambda_6 \neq f_6 \quad \lambda_7 \neq g_7 \quad ...$$

Il reale α non può appartenere alla "fila" sopra introdotta; infatti:

- $\alpha \neq x_1$ perché ha la prima cifra decimale diversa;
- $\alpha \neq x_2$ perché ha la seconda cifra decimale diversa;
- $\alpha \neq x_3$ perché ha la terza cifra decimale diversa; etc.

e, in generale:

- *α è diverso da x_n perché ha la n-esima cifra decimale diversa.*

Possiamo pertanto concludere che è impossibile "elencare" in un'unica "fila" tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 e, di conseguenza, è impossibile "elencare" in un'unica "fila" tutti gli elementi di **R**. Quindi **R** *non* può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N** e *non* ha la potenza del numerabile. ■

La proposizione ora dimostrata richiede evidentemente che la potenza di **R** venga denominata con un'espressione diversa da "potenza del numerabile": la definizione seguente stabilisce tale nuova denominazione.

Definizione. Un insieme equipotente a **R** si dice avente la *potenza del continuo*.

Abbiamo potuto constatare direttamente che non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa potenza, in particolare che non tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti a **N**: la potenza dell'insieme **R** è diversa dalla potenza del numerabile e viene detta potenza del continuo. A questo punto, è spontaneo porsi il problema: esistono insiemi infiniti non equipotenti né a **N** né a **R**?

La matematica contemporanea ha dato risposta affermativa a questa domanda: è possibile costruire un numero qualsiasi di altri insiemi infiniti aventi potenze sempre diverse (potremmo dire, intuitivamente, sempre più "numerosi"). Indichiamo con il simbolo $\aleph_0$ (che si legge: *Aleph con zero*) la potenza del numerabile e con $\aleph_1$ (*Aleph con uno*) la potenza del continuo: essi sono detti *numeri transfiniti*; è possibile definire i transfiniti $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$...: l'insieme dei numeri transfiniti è, a sua volta, un insieme infinito. Ma esistono numeri transfiniti compresi tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$? Esiste cioè un insieme infinito $I \subseteq$ **R** che non abbia né la potenza del numerabile né la potenza del continuo? Non è stata data una risposta a questa domanda; in particolare, è stata formulata la seguente ipotesi: *Ogni sottoinsieme infinito di* **R** *non avente la potenza del numerabile ha la potenza del continuo*. Essa, detta *ipotesi del continuo*, equivale a negare l'esistenza di transfiniti intermedi tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Nel 1962, Paul Joseph Cohen (nato nel 1934) dimostrò che l'ipotesi del continuo appartiene ad una particolare classe di questioni, denominate *indecidibili*.

5. *CENNI SULLE ANTINOMIE DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

5.1. Le antinomie

Concludiamo la sezione dedicata alla teoria degli insiemi presentando alcune importanti considerazioni storiche, dedicate ad uno degli argomenti più affascinanti della logica matematica: ci riferiamo alla questione delle antinomie, situazioni decisamente contradditorie da distinguere dai paradossi, frasi apparentemente ingannevoli, strane ma eleganti, nelle quali sembrano "convivere" verità e falsità (la letteratura su antinomie e paradossi è vastissima; ci limitiamo ad indicare [Hamblin, 1970] e [Falletta, 1989]).

Il termine "antinomia" deriva dal greco "anti" (contro) e "nomos" (legge, norma); esso è utilizzato per indicare il verificarsi di una contraddizione, ovvero, ad esempio, la presenza di una particolare proposizione che al contempo risulta essere vera e falsa, nell'ambito di una teoria. L'improponibile contrasto tra i valori di verità risulta allora inevitabile, finendo così per ledere la stessa validità del sistema logico nel quale viene scoperta l'antinomia in questione.

Verso la fine del secolo scorso, vengono proposte ed esaminate numerose antinomie riguardanti la teoria degli insiemi. Alcune di esse sono antinomie semantiche, ovvero collegate al significato attribuito a particolari termini del linguaggio; altre invece sono antinomie logiche, ovvero connesse alla struttura delle frasi in questione, come la celebre antinomia di Russell, che esamineremo nel paragrafo seguente.

> "*L'enunciato che segue è falso.*
> *L'enunciato che precede è vero.*
> Congiuntamente questi enunciati danno lo stesso risultato del paradosso di Epimenide. Eppure, separatamente, sono enunciati innocui e perfino potenzialmente utili".
>
> Douglas R. Hofstaedter

Infatti una delle più celebri antinomie semantiche è *l'antinomia del mentitore* (o *di Epimenide*), nota sino dall'antichità ([Koiré, 1947]; [Rivetti Barbò, 1964]; [Martin, 1970]; [Maracchia, 1990]). Essa è sintetizzata nella frase:

Io sto mentendo

Riflettendo su questa affermazione, ci rendiamo conto che:

- se chi pronuncia tale frase dice la verità, allora egli sta effettivamente mentendo, e questa è una contraddizione;
- se chi pronuncia tale frase mente, allora egli non sta mentendo e, di conseguenza, sta dicendo la verità: anche questa è una contraddizione.

Illustriamo ora una semplice ed elegante antinomia della denotazione (detta di Berry-Russell, ma la proposta originale è di Richard). È noto che il numero delle sillabe dei nomi con i quali si indicano, nella lingua inglese, i numeri interi positivi tende a crescere al crescere del numero nominato. Pertanto, i nomi di alcuni numeri interi positivi devono essere costituiti da almeno diciannove sillabe; fra questi, ne esisterà uno più piccolo di tutti gli altri. Chiameremo tale numero (che, in inglese, è 111777) "il più piccolo intero non definibile con meno di diciannove sillabe". Ma...

il più piccolo intero non definibile con meno di diciannove sillabe è (in inglese) proprio una "definizione" costituita da diciotto sillabe!

La contraddizione appare dunque evidente: "il più piccolo intero non definibile con meno di diciannove sillabe" è stato definito con sole diciotto sillabe. In questo caso, però, le radici dell'antinomia vanno ricercate nel particolare di denotazione che si usa per i termini in questione.

Ritorniamo ora alla questione dell'*insieme di tutti gli insiemi*. Anche questa nozione risulta contraddittoria. Infatti, ricordando che l'insieme delle parti $\wp(\mathrm{I})$ è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di I, sussiste il *teorema di Cantor*, secondo il quale per ogni insieme I, vale $\#\mathrm{I} < \#\wp(\mathrm{I})$. Immaginiamo ora di poter parlare dell'*insieme totale* (insieme di "tutti gli insiemi") T; risulterebbe:

$$\wp(\mathrm{T})\subseteq\mathrm{T} \text{ (infatti T è l'insieme totale!):} \qquad \#\wp(\mathrm{T}) \le \#\mathrm{T}$$

contro il teorema di Cantor, che porta invece a: $\#\mathrm{T} < \#\wp(\mathrm{T})$.

5.2. Gottlob Frege e Bertrand Russell

Il progetto culturale di Gottlob Frege (1848-1925), uno dei massimi logici dell'intera storia della cultura, può essere sintetizzato nel tentativo di ricondurre interamente la matematica alla logica (attraverso la teoria degli insiemi). Nel 1902, proprio alla vigilia della pubblicazione della seconda parte della grande opera logica fregeana (*Princìpi dell'Aritmetica derivati ideograficamente*), il trentenne Bertrand Russell (1872-1970) rilevò una contraddizione nel capolavoro del logico tedesco: essa è riassunta nella celebre *antinomia di Russell* o *antinomia degli insiemi normali* [Garciadiego, 1992].

La formulazione originale dell'antinomia di Russell è basata sulla definizione di insieme normale, che illustreremo. L'idea di insieme, come sappiamo, non è introdotta da una definizione, ma è un concetto primitivo; non ci sono particolari restrizioni al tipo di elementi che possono appartenere all'insieme dato. È quindi possibile (perché no?) richiedere che ad un certo insieme appartenga se stesso come elemento.

Ecco dunque la definizione di Russell: un insieme I si definisce *normale* quando ha la proprietà di non contenere se stesso come elemento.

Esempio. L'insieme: $\mathrm{I} = \{x\in\mathbf{N}\colon x<5\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ è un insieme normale, in quanto non contiene I stesso come elemento: $\mathrm{I}\notin\mathrm{I}$.

L'insieme A di tutti gli insiemi *non* è un insieme normale, in quanto contiene se stesso come elemento: $\mathrm{A}\in\mathrm{A}$.

Consideriamo ora l'insieme N avente per elementi tutti e soltanto gli insiemi normali: N *contiene se stesso come elemento?*

Una prima possibilità è che N contenga se stesso come elemento. Ma N è l'insieme formato da tutti e soltanto gli insiemi normali, ovvero da tutti e soltanto quegli insiemi che non contengono se stesso come elemento; perciò dovremmo concludere che se N appartiene a N risulta che N non può contenere se stesso come elemento! La nostra prima risposta finisce quindi per essere contraddittoria.

La rimanente possibilità è che N non contenga se stesso come elemento. Ma in tale caso N risulterebbe essere un insieme normale e, di conseguenza, dovrebbe proprio appartenere a N. Ed anche questa risposta è contraddittoria.

In simboli, l'insieme N è $\{I: I \notin I\}$ e le due possibili ipotesi sull'appartenenza dell'insieme N a N stesso portano alle implicazioni (sconcertanti):

<u>se</u> $N \in N$ <u>allora</u> $N \notin N$
<u>se</u> $N \notin N$ allora $N \in N$

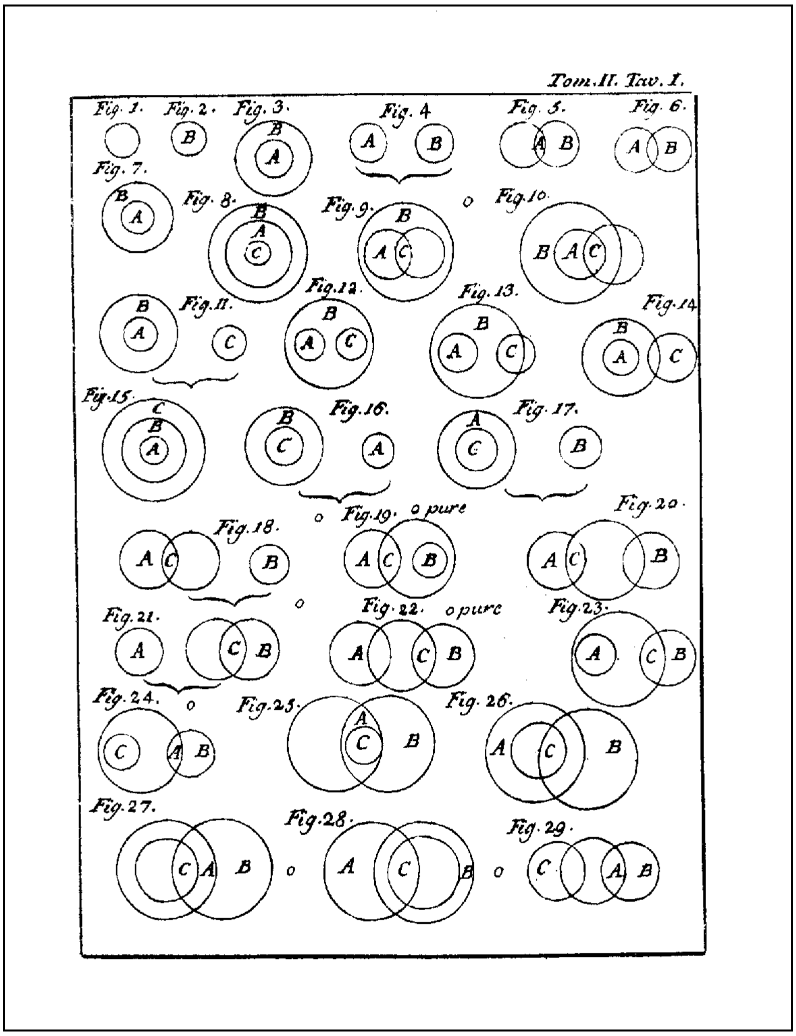
ovvero a un'inevitabile contraddizione.

Osservazione. Per molti versi analoga all'antinomia degli insiemi normali è l'*antinomia del barbiere* (lo stesso Bertrand Russell la ricorda come pressoché equivalente alla propria antinomia: si veda ad esempio: [Aimonetto, 1975]).

In un paese isolato, uno degli abitanti è il barbiere e rade tutti (e soltanto) coloro che non si radono da sé. Domanda: in quel paese, chi rade il barbiere?

Ammettiamo che il barbiere si rada da sé; ma allora è proprio il barbiere che lo rade, mentre avevamo affermato che il barbiere rade tutti e soltanto coloro che non si radono da sé! Questa prima risposta è quindi contraddittoria.

Ammettiamo allora che il barbiere non si rada da sé; ma in tale caso dovrebbe essere proprio il barbiere a raderlo, in quanto avevamo affermato che il barbiere rade tutti e soltanto coloro che non si radono da sé: quindi egli si rade da sé. Ed anche questa seconda risposta si rivela contraddittoria.



La tavola di *Lettres à une princesse d'Allemagne* (*Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*: Napoli 1787) in cui Leonhard Euler ha introdotto la rappresentazione, oggi diffusissima, per indicare gli insiemi