IV
Logica dei predicati: Calcolo dei quantificatori

14. FORMULE PREDICATIVE E QUANTIFICATORI

> "Il simbolo '$(x).\varphi(x)$' [per ogni x, $\varphi(x)$ è vera] denota una proposizione definita, e non c'è alcuna differenza, quanto al significato, fra '$(x).\varphi(x)$' e '$(y).\varphi(y)$' quando esse compaiono nello stesso contesto. Così, la 'x' in '$(x).\varphi(x)$' non è una componente ambigua di nessuna espressione in cui compaia '$(x).\varphi(x)$'".
>
> Bertrand Russell e Alfred North Whitehead

14.1. Dalla segnatura alle formule predicative

Come abbiamo precedentemente osservato, la logica che abbiamo finora esposto, detta logica degli enunciati, si occupa degli enunciati atomici intesi come blocchi unici, senza cioè esaminare la loro "struttura interna". In altre parole, nell'ambito della logica degli enunciati le due frasi:

Parigi è in Francia
Tutti i quadrati hanno quattro lati

non presentano alcuna differenza sostanziale. Si tratta infatti di due enunciati (peraltro entrambi veri), e dicendo ciò non si fa riferimento alla loro ben diversa struttura: il primo di essi è evidentemente riferito ad un *singolo* soggetto (Parigi), al quale viene attribuita una certa proprietà (quella di trovarsi in Francia); la seconda frase, invece, coinvolge *tutti* i quadrati (quindi ha molti soggetti) e ad essi (ovvero: a ciascun quadrato) riferisce la proprietà di avere quattro lati.

Condurremo ora un'analisi più dettagliata di un enunciato: l'insieme dei concetti e dei procedimenti che dovremmo trattare viene detto *logica dei predicati* (o *calcolo dei predicati*). Esso contiene come parte propria la logica degli enunciati.

Riprendiamo l'introduzione che era stata proposta per la logica degli enunciati; l'alfabeto era costituito da lettere maiuscole per indicare enunciati, da connettivi e da alcuni segni come le parentesi o la virgola. Tale alfabeto non è sufficiente nel caso della logica dei predicati: infatti all'interno delle formule elementari (*atomiche*) del nostro linguaggio andremo anche ad analizzare gli "individui" dei quali si predica qualcosa ed i "predicati". Esaminando le due frasi sopra riportate, notiamo, a proposito del soggetto, che, nel primo caso, si tratta di un individuo ben preciso e con un nome (Parigi), mentre, nel secondo caso, si tratta di individui generici di una classe (i quadrati), della quale specifichiamo che vanno considerati tutti gli elementi. Avremmo potuto considerare anche una situazione intermedia, quella, cioè, nella quale gli individui considerati non sono così generici e nemmeno fissati, ma soltanto parzialmente determinati in base ad altri individui:

I quadrati dei numeri reali sono positivi

In questo caso prendiamo in esame soltanto quegli elementi nella classe dei reali che si ottengono da un altro elemento mediante elevamento al quadrato, sono, cioè, nell'immagine di una funzione definita sulla classe. I nostri individui, ossia i *termini* del nostro linguaggi saranno dunque *costanti*, *variabili* o definiti da altri termini mediante *funzioni* (ad uno o più posti).

Per quanto riguarda i predicati, possiamo osservare che, anche se nella lingua parlata potrebbe sembrare innaturale, ogni predicato può essere ridotto ad una copula seguita da una proprietà ad uno o più posti, da pensare come una relazione tra individui. Nel primo e nel terzo esempio la cosa è evidente; il secondo potrebbe essere riformulato così:

Tutti i quadrati sono a quattro lati

Come esempio di predicato a più posti consideriamo

Luigi e Giacomo sono fratelli

dove "essere fratelli" è una proprietà che si deve predicare di due individui.

L'*alfabeto* di un linguaggio per la logica dei predicati si compone di:

- simboli per variabili, denotati da x, y, z, ... (eventualmente con indici);
- simboli per costanti, denotati da a, b, c, ... (eventualmente con indici);
- simboli funzionali a 1, 2, … posti (si dice: di *arità* 1, 2, …), denotati da f, g, h, ... (eventualmente con indici);
- simboli predicativi a 1, 2, … posti, denotati da P(-), Q(-,-), … (eventualmente con indici);
- i connettivi $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$;
- i quantificatori $\forall$, $\exists$;
- parentesi e virgole.

I *termini* di un linguaggio per la logica dei predicati sono definiti induttivamente rispetto alla presenza in essi di simboli funzionali:

- variabili e costanti sono termini;
- se $t_1, ..., t_n$ sono termini e f ha n posti, $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine.

Le *formule* sono espressioni del linguaggio definite induttivamente:

- se P ha n posti e $t_1, ..., t_n$ sono termini, $\mathrm{P}(t_1, ..., t_n)$ è una formula (*atomica*);
- se A e B sono formule, lo sono anche $\neg A$, $A\rightarrow B$, $A\wedge B$, $A\vee B$ e $A\leftrightarrow B$;
- se A è una formula, lo sono anche $\forall xA$ e $\exists xA$, dove x è una variabile.

Come è accaduto nella logica degli enunciati, spesso considereremo per semplicità soltanto una parte dell'alfabeto. Talvolta nella scrittura si omettono virgole e parentesi, quando ciò non generi confusione.

14.2. I quantificatori

Nella logica dei predicati abbiamo di solito a che fare con frasi del tipo:

Esiste (almeno) un oggetto x che verifica la proprietà P
Per ogni oggetto y è verificata la proprietà Q

La formalizzazione della prima frase sopra riportata necessita di un *quantificatore esistenziale*, $\exists$, che garantisca l'esistenza di almeno un elemento della classe considerata, che verifichi una proprietà data; la seconda, di un *quantificatore universale*, $\forall$, che garantisca il rispetto della proprietà data da parte di tutti gli elementi di una classe considerata.

In base a questa intuizione possiamo introdurre il concetto di verità nella logica dei predicati. La verità di una formula complessa non si potrà ottenere, come per gli enunciati, assegnando dei valori di verità alle componenti atomiche e facendo poi il calcolo in base ai connettivi, usando le tavole di verità. Questa volta le formule atomiche potranno variare il loro valore in base alla struttura interna. Ad esempio, consideriamo la seguente formula A:

$$\forall x\ \exists y\ \mathrm{P}(x,y)$$

Essa afferma che *per ogni x esiste un y tale che la coppia (x,y) goda di una certa proprietà P*. Possiamo chiederci: *A è vera o è falsa?* Per rispondere a tale domanda è indispensabile chiarire una serie di circostanze: innanzitutto l'*"ambiente"* nel quale la formula A deve essere interpretata: cioè che tipo di individui viene rappresentato da x e da y? Ad esempio x e y possono essere numeri naturali, o interi (o razionali, o reali, o complessi…), o altre cose ancora. Si tratta poi di dare un significato a P(-,-): avendo scelto un universo numerico al primo passo, potremmo scegliere per P la relazione $x+y=0$ (ma potremmo scegliere tutt'altra cosa). A questo punto la formula atomica $\mathrm{P}(x,y)$ sarà vera per una certa interpretazione e falsa in altre. Ad esempio, è vera se consideriamo i numeri interi, la proprietà $x+y=0$ e l'assegnazione del valore 3 ad x e del valore –3 ad y; ma non è vera se, lasciando invariate le prime due scelte, assegniamo 3 ad x e 4 ad y. La situazione è ancora diversa se cambiamo la scelta dell'universo e consideriamo i numeri naturali. In quel caso nessuna assegnazione rende vera la formula atomica $\mathrm{P}(x,y)$.

Notiamo che, nella formula $\forall x\ \exists y\ \mathrm{P}(x,y)$, il valore di verità varia in base all'universo ed all'interpretazione del predicato, e non più rispetto all'assegnazione di valori alle variabili, perché queste sono ormai "vincolate" dai quantificatori. Con la fissata interpretazione di P(-,-), A è falsa nei naturali e vera in tutti gli altri dominii numerici considerati.

Come nella logica degli enunciati, ci saranno poi formule vere indipendentemente dall'interpretazione specifica, ma soltanto a causa della loro struttura sintattica e delle regole generali che daremo per interpretarle: ad esempio, dire che esiste almeno un x per cui è verificata la proprietà P equivale a dire che non per ogni x per la proprietà P risulta non verificata. In simboli:

$$\exists x\ \mathrm{P} \leftrightarrow \neg(\forall x\ \neg \mathrm{P})$$

Ciò vuol dire che il quantificatore esistenziale $\exists$ può essere definito a partire dal quantificatore $\forall$ e dall'operatore di negazione $\neg$; osserviamo che, analogamente, il quantificatore universale $\forall$ potrebbe essere definito a partire dal quantificatore $\exists$ e dall'operatore di negazione $\neg$: dire che per ogni x è verificata la proprietà P equivale infatti a dire che non esiste alcun x per cui la proprietà P risulta non verificata, in simboli

$$\forall x\ \mathrm{P} \leftrightarrow \neg(\exists x\ \neg \mathrm{P})$$

Ad esempio, al posto degli enunciati

Esiste (almeno) un quadrilatero equilatero
Ogni italiano è europeo

possiamo scrivere

Non ogni quadrilatero è non equilatero
Non esiste alcun italiano che non sia europeo

Ciò consente di precisare alcune importanti osservazioni riguardanti la negazione di una frase quantificata, che riassumiamo così (ricordiamo che l'enunciato $\neg(\neg A)$ equivale ad A):

- la negazione di $\exists x$ P è $\neg(\neg(\forall x \neg P))$, ovvero è $\forall x \neg P$
- la negazione di $\forall x$ P è $\neg(\neg(\exists x \neg P))$, ovvero è $\exists x \neg P$

Esempio. Le negazioni dei due enunciati:

Esiste (almeno) un quadrilatero equilatero
Ogni italiano è europeo

sono, rispettivamente, gli enunciati:

Ogni quadrilatero non è equilatero
Esiste (almeno) un italiano che non è europeo

Osservazione. Le frasi sopra scritte sono state ottenute combinando alcuni termini che abbiamo introdotto in ambito logico; ma in italiano, ad esempio, l'espressione "*ogni quadrilatero non è equilatero*" non viene usata. Essa è sempre sostituita dalla frase (con lo stesso significato) "*nessun quadrilatero è equilatero*".

Esempio. Torniamo all'antinomia di Epimenide, precedentemente ricordata ("Io sto mentendo": la denominazione è tratta da Epimenide di Cnosso, VI sec. a. C., citato nella I lettera di Paolo a Tito, 12), a volte espressa nella forma:

Epimenide (cretese) afferma: "Tutti i Cretesi sono mentitori"

Talvolta a questa frase si attribuisce il carattere di antinomia: è vero?

Se indichiamo con $C(x)$ "$x \in C$ (insieme dei Cretesi)" e con $P(x; y)$ "x pronuncia la frase y", possiamo scrivere

$$\forall x\{C(x) \to \forall y[P(x; y) \to (y \leftrightarrow (A \wedge \neg A))]\}$$

la cui negazione è

$$\exists x \neg\{C(x) \to \forall y[P(x; y) \to (y \leftrightarrow (A \wedge \neg A))]\}$$

Ricordando che $A \to B$ è falso se e solo se A è vero e B è falso, abbiamo

$\exists x\{C(x) \wedge \neg\forall y[P(x; y) \rightarrow (y \leftrightarrow (A\wedge\neg A))]\}$
$\exists x\{C(x) \wedge \exists y \neg [P(x; y) \rightarrow (y \leftrightarrow (A\wedge\neg A))]\}$
$\exists x\{C(x) \wedge \exists y[P(x; y) \wedge \neg(y \leftrightarrow (A\wedge\neg A))]\}$

La possibilità di soddisfare tale frase dipende dunque dalla disponibilità di elementi di C diversi da Epimenide (che pronuncia la frase stessa!). Non si tratta di un vera e propria antinomia: Epimenide potrebbe mentire e ciò comporterebbe soltanto la presenza di Cretesi veritieri (diversi da Epimenide).

Invece l'affermazione*"Io sto mentendo"* sarebbe assai più grave (se chi pronuncia tale frase dice la verità, allora egli sta effettivamente mentendo e questa è una contraddizione; se chi pronuncia tale frase mente, allora egli non sta mentendo e, di conseguenza, sta dicendo la verità ed anche questa è una contraddizione). Tale situazione si riferisce alla falsità di una frase attualmente pronunciata; una frase di tal genere potrebbe essere:

"Questa frase è falsa"

La formalizzazione di tale situazione richiederebbe una sorta di "autoreferenzialità": indicando con φ la frase $y\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$, avremmo che al posto di y dovrebbe essere inserita la frase φ stessa; dunque indicheremmo con φ la frase $\varphi\leftrightarrow(A\wedge\neg A)$. Non approfondiremo la questione.

14.3. Variabili vincolate e variabili libere

Abbiamo notato nel precedente paragrafo che è molto importante, ai fini della determinazione della verità di una formula, sapere se questa dipenda o meno dall'assegnazione di valori alle variabili e che questo accade a seconda se la variabile è vincolata o meno da un quantificatore. Dobbiamo ora precisare questo concetto.

Definizione. Nella formula $\forall x\alpha$, α si chiama *campo d'azione* del quantificatore $\forall$ ed analogamente diremo per $\exists$. Nelle formule $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ la variabile x si dice *vincolata* (o *quantificata* o *legata*).

Specifichiamo che un'occorrenza di una variabile x si dice vincolata quando essa è la variabile che segue un $\forall$ oppure è nel campo d'azione di un tale quantificatore; lo stesso vale per $\exists$. Un'occorrenza di una variabile non vincolata si dice *libera*. Si noti dunque che all'interno di una formula possono esserci sia occorrenze libere che occorrenze vincolate di x: tale è ad esempio la x nella formula: $\alpha(x)\vee(\forall x)\beta(x)$.

Non sempre espliciteremo tutte le variabili che compaiono in una formula. Tuttavia spesso se una variabile z appare libera nella formula α si scrive $\alpha(z)$. L'insieme delle variabili nel termine t si indica con $\mathrm{VAR}(t)$, mentre l'insieme delle variabili libere della formula α si indica con $\mathrm{FREE}(\alpha)$. Diamo anche delle variabili libere una definizione induttiva. Siano * un connettivo binario e Q un quantificatore; allora

- le variabili libere di $\neg\alpha$ sono quelle di α: $\mathrm{FREE}(\neg\alpha) = \mathrm{FREE}(\alpha)$
- le variabili libere di $\alpha*\beta$ sono quelle di α unite a quelle di β: $\mathrm{FREE}(\alpha*\beta) = \mathrm{FREE}(\alpha) \cup \mathrm{FREE}(\beta)$
- le variabili libere di $Qx\alpha$ sono quelle di α tranne x: $\mathrm{FREE}(Qx\alpha) = \mathrm{FREE}(\alpha) - \{x\}$

La definizione di variabile vincolata è ispirata alle notazioni con variabile *apparente* in matematica:

la variabile x in: $\lim_{x \to c} f(x)$,

la variabile n in: $\lim_{n \to +\infty} a_n$,

la variabile x in: $\int_a^b f(x)dx$ etc.

Osserviamo che l'espressione "variabile apparente" (originariamente contrapposta a "variabile reale") fu introdotta nel 1897 da Giuseppe Peano (1858-1932) che scrive:

> "In queste spiegazioni diciamo che una lettera che compare in una formula è *reale* oppure *apparente*, a seconda che il valore della formula dipenda o non dipenda dal nome di questa lettera. Così, in $\int_0^1 x^m dx$ la lettera x è apparente e la lettera m reale. Tutte le lettere che compaiono in un teorema sono apparenti, perché la sua verità è indipendente dai nomi delle lettere" (da *Formulaire*, 2, 1, 23).

Definizione. Il termine t si dice *liberamente sostituibile* a x nella formula $\alpha(x)$ se sostituendo t in tutte le occorrenze libere di x in $\alpha(x)$ nessuna variabile di t risulta quantificata dopo la sostituzione. In questo caso si scrive $\alpha(t)$.

(Contro)esempio. Scrivendo

$$\exists y[\neg(x = y)]$$

diciamo che esiste un y diverso da x: affermazione plausibile, ad esempio in un insieme numerico costituito da più elementi distinti. Attenzione: il termine y *non* è liberamente sostituibile a x. Se sostituissimo y al posto di x otterremmo infatti:

$$\exists y[\neg(y = y)]$$

che è un enunciato *falso*.

Definizione. Un termine senza variabili si dice *chiuso*. Una formula predicativa si dice *chiusa* se non ha variabili libere, *aperta* altrimenti.

Osserviamo che la sostituzione di una variabile vincolata con un'altra che non compaia già nella formula, non cambia certo il significato della formula.

14.4. Modelli e validità

Abbiamo visto nell'esempio del paragrafo 14.2 che la verità di una formula dipende dall'universo o *dominio U* nel quale viene fatta un'*assegnazione* di valore alle variabili libere e dall'interpretazione che diamo ai simboli predicativi e funzionali che compaiono nella formula.

Definizione. Data una formula F, un'*interpretazione M* per F consiste in:

- un *dominio* non vuoto U
- una *relazione* n-aria $|P| \subseteq U^n$ per ogni simbolo predicativo n-ario P che compare in F
- una *funzione* n-aria $|f| \subseteq U^n \to U$ per ogni simbolo funzionale n-ario f che compare in F
- un *elemento* fissato di U per ogni simbolo di costante che compare in F

Le variabili sono da pensarsi interpretate genericamente da elementi di U; i temini saranno quindi induttivamente interpretati come elementi di U, più o meno determinati a seconda di quante variabili libere contengano.

Definizione. Data un'interpretazione M per F, F si dice *soddisfacibile* in M, se esiste un'*assegnazione* di valori alle variabili libere in F tale che:

- se F è atomica, cioè del tipo $P(t_1,\dots, t_n)$, allora deve essere $(|t_1|\dots, |t_n|)\in |P|$
- se F è del tipo $H\wedge G$, allora devono essere soddisfatte H e G
- se F è del tipo $H\vee G$, allora devono essere soddisfatte o H o G
- se F è del tipo $H\to G$, allora se è soddisfatta H allora deve esserlo anche G
- se F è del tipo $\neg H$, allora non deve essere soddisfatta H
- se F è del tipo $\forall x H(x)$, allora ogni assegnazione di valore alla x deve soddisfattare H
- se F è del tipo $\exists x H(x)$, allora esiste un'assegnazione di valore alla x che soddisfa H

Definizione. Data un'interpretazione M per F, F si dice *vera* in M, se è soddisfatta per ogni assegnazione di valore alle variabili libere; M si dice allora *modello* di F, in simboli $M \models F$.

Definizione. Una formula F, si dice (*logicamente*) *valida*, se risulta vera in ogni interpretazione. Si scrive allora: $\models P$.

Analogamente, sia Φ è un insieme di formule chiuse (che talvolta viene detto *teoria*); la scrittura

$$M \models \Phi$$

esprime la verità di tutte le formule chiuse di Φ in M. Diremo inoltre che F è *conseguenza logica* di Φ quando F vale in tutti i modelli in cui valgono tutte le formule di Φ. Ciò si esprime scrivendo

$$\Phi \models F$$

Infine, se con il simbolo $\perp$ indichiamo un assurdo, il fatto che Φ non sia soddisfacibile si esprime scrivendo

$$\Phi \models \perp$$

Esempio. Esprimiamo attraverso la simbologia introdotta il *principio della dimostrazione per assurdo*:

$$\Phi \models F \quad \text{se e solo se} \quad \Phi, \neg F \models \perp$$

Proposizione. Le formule seguenti sono valide nel calcolo dei predicati (esercizio):

$$\forall x P(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg P(x)$$
$$\exists x P(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x)$$
$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\exists x \forall y P(x; y) \rightarrow \forall y \exists x P(x; y)$$
$$\forall x \forall y P(x; y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x; y)$$
$$\exists x \exists y P(x; y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x; y)$$

$$\exists x[P(x)\vee Q(x)] \leftrightarrow [\exists x P(x)\vee\exists x Q(x)]$$
$$\forall x[P(x)\wedge Q(x)] \leftrightarrow [\forall x P(x)\wedge\forall x Q(x)]$$

$$[\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)\vee Q(x)]$$
$$\exists x[P(x)\wedge Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x)\wedge\exists x Q(x)]$$

$$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x)\leftrightarrow\forall x Q(x)]$$
$$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x)\leftrightarrow\exists x Q(x)]$$

$$[\exists x P(x)\vee Q] \leftrightarrow \exists x[P(x)\vee Q]$$
$$[\forall x P(x)\vee Q] \leftrightarrow \forall x[P(x)\vee Q]$$
$$[\exists x P(x)\wedge Q] \leftrightarrow \exists x[P(x)\wedge Q]$$
$$[\forall x P(x)\wedge Q] \leftrightarrow \forall x[P(x)\wedge Q]$$

$$\forall x[P\rightarrow Q(x)] \leftrightarrow [P\rightarrow\forall x Q(x)]$$
$$\forall x[P(x)\rightarrow Q] \leftrightarrow [\exists x P(x)\rightarrow Q]$$

$$\exists x[P(x)\rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x)\rightarrow\exists x Q(x)]$$
$$[\exists x P(x)\rightarrow\forall x Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]$$

$$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x)\rightarrow\forall x Q(x)]$$
$$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x)\rightarrow\exists x Q(x)]$$
$$\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x)\rightarrow\exists x Q(x)]$$

15. IL METODO DEI TABLEAUX E IL CALCOLO DEI PREDICATI

15.1. Tableaux e quantificatori

> "La logica dei predicati si presenta come un'estensione dell'algebra delle proposizioni. Essa comprende tutta l'algebra delle proposizioni: cioè le proposizioni elementari, considerate come grandezze che assumono uno dei due valori di verità V o F, tutte le operazioni dell'algebra delle proposizioni e, di conseguenza, tutte le sue formule. In più, però, la logica dei predicati introduce, nello studio delle proposizioni, attributi di oggetti. In tale logica le proposizioni vengono analizzate in soggetto e predicato".
>
> P. S. Novikov

La logica dei predicati si presenta come un raffinamento della logica degli enunciati; dunque costruiremo i tableaux di formule predicative applicando innanzitutto le regole precedentemente introdotte per i tableaux proposizionali. Dovremo però introdurre altre regole per poter trattare anche i quantificatori; per tale ragione, questa parte della logica è anche chiamata c*alcolo dei quantificatori*.

Introduciamo la questione occupandoci dell'esempio seguente, nel quale cercheremo di costruire il tableau della negazione della formula predicativa valida $\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]\rightarrow[\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)]$:

$$\begin{array}{c}
\neg\{\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]\rightarrow[\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)]\}\\
|\\
\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]\\
\neg[\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)]\\
|\\
\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]\\
\forall xP(x)\\
\neg\forall xQ(x)
\end{array}$$

Il nostro lavoro non è evidentemente finito: il tableau così ottenuto non è chiuso e non abbiamo eliminato i quantificatori. Esaminiamo l'ultima formula scritta

$$\neg\forall xQ(x)$$

che sappiamo essere equivalente a

$$\exists x\neg Q(x)$$

La costruzione di un tableau, come sappiamo, formalizza la ricerca di un controesempio; dunque a questo punto dobbiamo sostituire alla variabile *x* un qualche elemento del dominio nel quale viene considerata la formula, tentando di arrivare ad una contraddizione; indichiamo con *a* tale elemento (*istanza*):

$$\begin{array}{cc}
\neg\{\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]\rightarrow[\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)]\} & \\
| & \\
\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] & \\
\neg[\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)] & \\
| & \\
\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] & \\
\forall xP(x) & \\
\neg\forall xQ(x) & \text{cioè: } \exists x\neg Q(x)\\
| & \\
\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)] & \\
\forall xP(x) & \\
\neg Q(a) &
\end{array}$$

Per quanto riguarda i quantificatori universali, possiamo scrivere le due formule $\forall x[P(x)\rightarrow Q(x)]$ e $\forall xP(x)$ facendo proprio riferimento all'elemento *a* considerato (sono riferite a *tutti* gli elementi!), dunque scrivendo

$$P(a)\rightarrow Q(a) \qquad \text{e} \qquad P(a)$$

Otteniamo quindi

$$
\begin{array}{c}
\neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\rightarrow[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]\}\\
|\\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\\
\neg[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]\\
|\\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\\
\forall x\mathrm{P}(x)\\
\neg\forall x\mathrm{Q}(x)\\
|\\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\\
\forall x\mathrm{P}(x)\\
\neg\mathrm{Q}(a)\\
|\\
\mathrm{P}(a)\rightarrow\mathrm{Q}(a)\\
\mathrm{P}(a)\\
\neg\mathrm{Q}(a)
\end{array}
$$

Anticipiamo che nel paragrafo successivo sarà necessario, su questa procedura, fare una precisazione che, nel caso ora in esame, non risulta indispensabile.

L'applicazione della regola proposizionale per $\mathrm{P}(a)\rightarrow\mathrm{Q}(a)$ porta a

$$
\begin{array}{c}
\neg\{\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\rightarrow[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]\}\\
|\\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\\
\neg[\forall x\mathrm{P}(x)\rightarrow\forall x\mathrm{Q}(x)]\\
|\\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\\
\forall x\mathrm{P}(x)\\
\neg\forall x\mathrm{Q}(x)\\
|\\
\forall x[\mathrm{P}(x)\rightarrow\mathrm{Q}(x)]\\
\forall x\mathrm{P}(x)\\
\neg\mathrm{Q}(a)\\
|\\
\mathrm{P}(a)\rightarrow\mathrm{Q}(a)\\
\mathrm{P}(a)\\
\neg\mathrm{Q}(a)\\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash\\
\neg\mathrm{P}(a) & \mathrm{Q}(a)\\
\mathrm{P}(a) & \mathrm{P}(a)\\
\neg\mathrm{Q}(a) & \neg\mathrm{Q}(a)\\
\blacklozenge & \blacklozenge
\end{array}
\end{array}
$$

Il tableau predicativo così ottenuto è chiuso.

Come accennato, il procedimento sopra esemplificato necessita però di alcune precisazioni fondamentali. Anticipiamo le due più importanti:

- *la scelta di un elemento particolare nel caso di una formula con un quantificatore universale deve poter essere ripetuta più volte* (dal momento che ogni elemento può essere utilizzato);
- *la scelta di un elemento particolare nel caso di formule con quantificatori esistenziali deve essere indipendente da elementi precedentemente scelti* (perché l'esistenza di un elemento che verifica una certa proprietà non implica mai che un elemento già dato la verifichi).

Il seguente esempio renderà più chiara l'ultima precisazione sulle regole predicative per la costruzione dei tableaux.

(Contro)esempio. Consideriamo le ipotesi del teorema di Cauchy:

$$\begin{cases} f \ \ continua \ in \ [a;\, b] \\ f \ \ derivabile \ in \ ]a;\, b[\\ g \ continua \ in \ [a;\, b] \\ g \ derivabile \ in \ ]a;\, b[\\ \forall x \in \ ]a;\, b[,\ g'(x) \neq 0 \end{cases}$$

In tale situazione, le ipotesi del teorema di Lagrange sono rispettate sia dalla funzione *f* che dalla *g*; potremmo quindi scrivere

$$\exists c \in \ ]a;\, b[:\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
$$\exists c \in \ ]a;\, b[:\ g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$$

e, dividendo membro a membro, finiremmo con l'ottenere

$$\exists c \in \ ]a;\, b[:\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

cioè la tesi del teorema di Cauchy! La "dimostrazione" riportata *non* è però accettabile: la scrittura corretta di quanto ottenuto applicando due *distinte* volte il teorema di Lagrange dovrebbe essere, per quanto riguarda l'azione dei due quantificatori esistenziali:

$$\exists c \in \ ]a;\, b[:\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
$$\exists d \in \ ]a;\, b[:\ g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$$

(con *c* e *d* non necessariamente uguali) e da ciò *non* può direttamente essere ottenuta la tesi del teorema di Cauchy (che afferma l'esistenza "*di un (singolo) punto c* dell'intervallo]*a*; *b*[tale che...").

L'esempio che sarà proposto nel paragrafo seguente riprenderà la situazione ora rilevata nel metodo dei tableaux.

15.2. Regole per la costruzione di un tableau predicativo

Come sopra osservato, tutte le regole introdotte precedentemente con riferimento ai tableaux proposizionali possono essere nuovamente applicate per la costruzione di tableaux predicativi. Ad esse vanno aggiunte due nuove regole:

- se una formula di un ramo di un tableau è del tipo $\forall x\mathrm{A}(x)$ oppure $\neg\exists x\mathrm{B}(x)$, aggiungiamo un nuovo nodo:

$$
\begin{array}{ccc}
\forall x\mathrm{A}(x) & \qquad\qquad & \neg\exists x\mathrm{B}(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\forall x\mathrm{A}(x) & & \neg\exists x\mathrm{B}(x) \\
\mathrm{A}(a) & & \neg\mathrm{B}(a)
\end{array}
$$

- se una formula di un ramo di un tableau è del tipo $\exists x\mathrm{A}(x)$ oppure $\neg\forall x\mathrm{B}(x)$, aggiungiamo un nuovo nodo:

$$
\begin{array}{ccc}
\exists x\mathrm{A}(x) & \qquad\qquad & \neg\forall x\mathrm{B}(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{A}(a) & & \neg\mathrm{B}(a)
\end{array}
$$

Diversamente dalla seconda (talvolta detta *δ-regola*) e da quelle relative ai tableaux proposizionali, la prima regola (detta *γ-regola*) aggiunge una formula più semplice ma *mantiene anche la formula quantificata* (nell'esempio del paragrafo precedente non abbiamo fatto ciò, ma in tale caso, come sopra segnalato, questa omissione non è stata tale da pregiudicare la chiusura del tableau). Ciò accade per garantire l'essenziale possibilità di ripetere l'istanziazione della formula quantificata (universalmente) anche a nuove costanti che vengano introdotte successivamente.

Questa osservazione ha un'importante conseguenza: mentre nell'ambito della logica degli enunciati il metodo dei tableaux è di tipo *decisionale* (il tableau risulta comunque finito, chiuso o non chiuso e quindi fornisce una risposta al fatto che la negazione della formula esaminata sia o non sia una tautologia), in ambito predicativo tale metodo può portare a tableaux infiniti (e quindi può *non* portare a tale risposta in un numero finito di passi: riprenderemo questa considerazione nel paragrafo 15.4).

Inoltre, ripetiamo ancora quanto anticipato a proposito della presenza di formule quantificate esistenzialmente: la scelta di un elemento particolare in tale caso deve *essere del tutto indipendente da altre istanziazioni*. Illustriamo questa osservazione con il seguente esempio.

(Contro)esempio. Consideriamo il seguente tableau, riferito ad una formula con due quantificatori esistenziali:

$$\begin{array}{c}
[\exists x P(x)] \wedge \{\exists x[\neg P(x)]\} \\
| \\
\exists x P(x) \\
\exists x[\neg P(x)] \\
| \\
P(a) \\
\neg P(a)
\end{array}$$

Potremmo essere tentati di affermare la chiusura di tale tableau, ma sarebbe una conclusione *errata*: l'esistenza di una x per cui è $P(x)$ e di una x per cui è $\neg P(x)$ non implica che tali x siano lo stesso elemento (a meno che alla x non sia imposto di variare in un dominio costituito da un solo elemento). Pertanto l'ultimo nodo avrebbe dovuto essere:

$$\begin{array}{c}
P(a) \\
\neg P(b)
\end{array}$$

e in questo caso il tableau non può essere considerato chiuso.

Le formule elencate come valide nel calcolo dei predicati alla fine del precedente capitolo possono essere verificate, per esercizio, con il metodo dei tableaux predicativi. Ne diamo qui due esempi.

Esempio. Costruiamo il tableau predicativo per la negazione della formula $[\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$:

$$\begin{array}{c}
\neg\{[\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \\
| \\
\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\neg\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \\
/ \qquad\qquad \backslash \\
\begin{array}{cc}
\forall x P(x) & \forall x Q(x) \\
\neg\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} & \neg\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \\
| & | \\
\forall x P(x) & \forall x Q(x) \\
\neg[P(a) \vee Q(a)] & \neg[P(a) \vee Q(a)] \\
| & | \\
\forall x P(x) & \forall x Q(x) \\
\neg P(a) & \neg P(a) \\
\neg Q(a) & \neg Q(a) \\
| & | \\
P(a) & Q(a) \\
\forall x P(x) & \forall x Q(x) \\
\neg P(a) & \neg P(a) \\
\neg Q(a) & \neg Q(a) \\
\blacklozenge & \blacklozenge
\end{array}
\end{array}$$

Si osservi che sono state riscritte le formule del tipo $\forall x R(x)$ e $\neg\exists x R(x)$, come previsto dalle γ-regole applicate.

Il tableau predicativo così ottenuto è *chiuso*. Dunque la formula:

$$[\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$$

è valida. Si noti che abbiamo sostituito la stessa a in due formule esistenziali, ma queste si trovavano su rami diversi, quindi su due diverse “ricerche di controesempio”.

Esempio. Costruiamo il tableau predicativo per la negazione della formula $\forall x[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)]$:

$$\neg\{\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x)\leftrightarrow \exists x Q(x)]\}$$

|

$$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$$
$$\neg[\exists x P(x)\leftrightarrow \exists x Q(x)]$$

/ \

$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$
$\exists x P(x)$	$\neg\exists x P(x)$
$\neg\exists x Q(x)$	$\exists x Q(x)$
|	|
$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$
$P(a)$	$\neg\exists x P(x)$
$\neg\exists x Q(x)$	$Q(a)$
|	|
$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$
$P(a)$	$Q(a)$
$\neg\exists x Q(x)$	$\neg\exists x P(x)$
$\neg Q(a)$	$\neg P(a)$
|	|
$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$
$P(a)\leftrightarrow Q(a)$	$P(a)\leftrightarrow Q(a)$
$P(a)$	$Q(a)$
$\neg\exists x Q(x)$	$\neg\exists x P(x)$
$\neg Q(a)$	$\neg P(a)$

/ \ / \

$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$	$\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)]$
$P(a)$	$\neg P(a)$	$P(a)$	$\neg P(a)$
$Q(a)$	$\neg Q(a)$	$Q(a)$	$\neg Q(a)$
$\neg\exists x Q(x)$	$\neg\exists x P(x)$	$\neg\exists x P(x)$	$\neg\exists x P(x)$
$\neg Q(a)$	$P(a)$	$\neg P(a)$	$Q (a)$
♦	♦	♦	♦

Il tableau predicativo così ottenuto è *chiuso*. Ciò ci consente di concludere che la formula $\forall x[P(x)\leftrightarrow Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x)\leftrightarrow \exists x Q(x)]$ è valida.

15.3. Correttezza e completezza del metodo dei tableaux

Sia F una formula predicativa; usiamo la notazione $|\!-_T$ F per esprimere che $\neg$F ha un tableaux chiuso. Ricordiamo inoltre che la notazione $\models$ F esprime la validità di F.

Teorema (Correttezza del metodo dei tableaux). Se $|\!-_T$ F allora $\models$ F.

Dimostrazione(cenno). La dimostrazione è per induzione sulla complessità della formula e ricalca quella nel calcolo degli enunciati. Dovrà però essere estesa al caso nel qual si siano applicate le regole γ e δ.

Nel caso della regola γ, è $U(n) = \{\forall x P(x)\} \cup U_0$ e $U(n') = \{\forall x P(x), P(a)\} \cup U_0$ (dove U_0 può essere vuoto) e l'altezza di *n*' è *h*-1. Dunque, per l'ipotesi induttiva, U(*n*') è insoddisfacibile. Ciò significa che, data una qualsiasi interpretazione, o risulta falsa una formula di $U_0 \subseteq U(n)$, oppure risulta falsa P(*a*) e, quindi $\forall x P(x) \in U(n)$, oppure, direttamente, $\forall x P(x) \in U(n)$. Quindi U(*n*) è insoddisfacibile.

Nel caso della regola δ, è $U(n) = \{\exists x P(x)\} \cup U_0$ e $U(n') = \{P(a)\} \cup U_0$ (dove U_0 può essere vuoto) e l'altezza di *n*' è *h*-1. Dunque, per l'ipotesi induttiva, U(*n*') è insoddisfacibile. Ciò significa che, data una qualsiasi interpretazione, o risulta falsa una formula di $U_0 \subseteq U(n)$, oppure risulta falsa P(*a*) e, quindi anche $\exists x P(x) \in U(n)$, perché *a* è stata scelta in modo del tutto indipendente da altri valori e, perciò, la falsità della formula si darà indipendentemente dall'istanziazione che avremo fatto per il quantificatore esistenziale. Quindi U(*n*) è insoddisfacibile. ■

Teorema (Completezza del metodo dei tableaux). Se $\models$ F allora $|\!-_T$ F.

La dimostrazione in questo caso è piuttosto complessa e viene tralasciata. Infatti dal momento che il tableau potrebbe continuare indefinitamente, dovremo accertarci che tutti i casi possibili siano stati esaminati. Per questo avremmo bisogno della *costruzione sistematica*, cioè di un procedimento che assicura un'applicazione sistematica delle regole e la conclusione della costruzione del tableau, che risulterà o chiuso o non chiuso (non riteniamo di illustrare dettagliatamente le caratteristiche di tale procedimento di costruzione; rimandiamo a: Ben-Ari, 1998, p. 115).

Possiamo tuttavia osservare che, dal momento che una formula soddisfacibile ha sicuramente un tableaux aperto, un tale ramo può aiutarci ad individuare un modello come nel caso proposizionale. Infatti considerando come dominio l'insieme delle costanti che intervengono nel ramo ed interpretando i predicati come relazioni sulle costanti, più o meno soddisfatte a seconda dei letterali che troviamo in fondo al ramo, si può facilmente costruire un modello.

Esempio.

$$\forall y \exists x P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$$

$$\begin{array}{cc} / & \backslash \\ \neg\forall y \exists x P(x, y) & \exists x \forall y P(x, y) \\ | & | \\ \neg\exists x P(x, b) & \forall y P(a, y) \\ | & | \\ \neg\exists x P(x, b) & \forall y P(a, y) \\ \neg P(a, b) & P(a, b) \end{array}$$

La formula $\forall y \exists x \mathrm{P}(x, y) \to \exists x \forall y \mathrm{P}(x, y)$ è soddisfacibile. Il ramo di sinistra ci suggerisce, ad esempio, il modello $U = \{a,b\}$ con $|\mathrm{P}| = \{(a,b)\}$, quello di destra il modello $U = \{a,b\}$ con $|\mathrm{P}| = \emptyset$.

16. I SISTEMI DI GENTZEN E DI HILBERT PER IL CALCOLO DEI PREDICATI

16.1. Sistema di Gentzen per il calcolo dei predicati

La deduzione nel sistema di Gentzen, che nel paragrafo precedente era stata introdotta con riferimento ai soli enunciati, può essere estesa al calcolo dei predicati. Alle regole proposizionali si aggiungono le nuove regole per i quantificatori esistenziali e universali (quelle della prima riga possono essere denominate γ-regole, quelle della seconda δ-regole):

$$\frac{\mathrm{U} \cup \{\exists x \mathrm{A}(x), \mathrm{A}(a)\}}{\mathrm{U} \cup \{\exists x \mathrm{A}(x)\}} \qquad \frac{\mathrm{U} \cup \{\neg\forall x \mathrm{A}(x), \neg\mathrm{A}(a)\}}{\mathrm{U} \cup \{\neg\forall x \mathrm{A}(x)\}}$$

$$\frac{\mathrm{U} \cup \{\mathrm{A}(a)\}}{\mathrm{U} \cup \{\forall x \mathrm{A}(x)\}} \qquad \frac{\mathrm{U} \cup \{\neg\mathrm{A}(a)\}}{\mathrm{U} \cup \{\neg\exists x \mathrm{A}(x)\}}$$

Osserviamo che le δ-regole possono essere applicate solamente a condizione che la costante *a* non appaia in U (ciò è richiesto per non imporre restrizioni sull'interpretazione della costante *a*).

Illustriamo l'applicazione del metodo mediante l'esempio seguente (che riprendiamo da: Ben-Ari, 1998, p. 121).

Esempio. Deduciamo: $\exists x \forall y \mathrm{P}(x, y) \to \forall y \exists x \mathrm{P}(x, y)$.

$$\neg\forall y \mathrm{P}(a, y),\ \neg\mathrm{P}(a, b),\ \neg\mathrm{P}(a, a),\ \exists x \mathrm{P}(x, b),\ \mathrm{P}(a, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y \mathrm{P}(a, y),\ \neg\mathrm{P}(a, a),\ \exists x \mathrm{P}(x, b),\ \mathrm{P}(a, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y \mathrm{P}(a, y),\ \exists x \mathrm{P}(x, b),\ \mathrm{P}(a, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y \mathrm{P}(a, y),\ \exists x \mathrm{P}(x, b)$$
$$|$$
$$\neg\forall y \mathrm{P}(a, y),\ \forall y \exists x \mathrm{P}(x, y)$$
$$|$$
$$\neg\exists x \forall y \mathrm{P}(x, y),\ \forall y \exists x \mathrm{P}(x, y)$$
$$|$$
$$\exists x \forall y \mathrm{P}(x, y) \to \forall y \exists x \mathrm{P}(x, y)$$

Similmente al caso del calcolo degli enunciati, esiste una dimostrazione di Gentzen per U se e solo se è ottenibile un tableau semantico chiuso per l'insieme dei complementi delle formule di U. Si può dunque dimostrare che U è valida se e solo se c'è una sua dimostrazione nel sistema di Gentzen (scritto $\vdash_G$ U); ciò significa che il sistema di Gentzen è corretto e completo (la dimostrazione è perfettamente duale di quella per i tableaux):

Teorema (Correttezza del metodo deduttivo di Gentzen). Se $\vdash_G$ U allora $\models$ U.

Teorema (Completezza del metodo deduttivo di Gentzen). Se $\models$ U allora $\vdash_G$ U.

16.2. Cenni sul sistema di Hilbert per il calcolo dei predicati

Anche il sistema di Hilbert, che precedentemente era stato introdotto con riferimento ai soli enunciati non quantificati, può essere esteso al calcolo dei predicati. Ci limiteremo a sviluppare la questione facendo riferimento al quantificatore universale; per quanto riguarda il quantificatore esistenziale è infatti sufficiente ricordare che

$$\exists x \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg \mathrm{A}(x).$$

I nuovi assiomi (o schemi di assiomi) sono:

$\vdash \forall x \mathrm{A}(x) \rightarrow \mathrm{A}(a)$	Assioma 4
$\vdash \forall x[\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}(x)] \rightarrow [\mathrm{A} \rightarrow \forall x \mathrm{B}(x)]$	Assioma 5

dove il simbolo "$\vdash$" denota, come al solito, la dimostrabilità. La nuova *regola di inferenza* è detta di *generalizzazione*:

$$\frac{\vdash \mathrm{A}(a)}{\vdash \forall x \mathrm{A}(x)}$$

Consideriamo, come nel caso preposizionale, la *regola di deduzione:* per un insieme di formule U ed una coppia di formule A e B, si ha che

$$\frac{\mathrm{U} \cup \{\mathrm{A}\} \vdash \mathrm{B}}{\mathrm{U} \vdash \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}}$$

In questo caso, però, essa non vale in generale. Infatti potrà essere utilizzata purché nella dimostrazione di U $\cup$ {A} $\vdash$ B non sia applicata la regola di generalizzazione ad una costante che appare in A. Si prova (*teorema di deduzione*) che la regola di deduzione, in questa forma, è una regola derivata corretta.

Illustriamo l'applicazione del metodo mediante l'esempio seguente (che riprendiamo da: Ben-Ari, 1998, p. 124).

Esempio. Deduciamo: $\vdash \forall x[P(x)\to Q(x)] \to [\forall xP(x)\to\forall xQ(x)]$.

1.	$\forall x[P(x)\to Q(x)], \forall xP(x) \vdash \forall xP(x)$	Ipotesi
2.	$\forall x[P(x)\to Q(x)], \forall xP(x) \vdash P(a)$	Assioma 4
3.	$\forall x[P(x)\to Q(x)], \forall xP(x) \vdash \forall x[P(x)\to Q(x)]$	Ipotesi
4.	$\forall x[P(x)\to Q(x)], \forall xP(x) \vdash P(a)\to Q(x)$	Assioma 4

A questo punto possiamo applicare il metodo in ambito proposizionale ed ottenere 5 (lasciamo al lettore il compito di esplicitare il procedimento per esercizio):

5.	$\forall x[P(x)\to Q(x)], \forall xP(x) \vdash Q(a)$	(da 2 e da 4)

La deduzione si conclude nei passi seguenti:

6.	$\forall x[P(x)\to Q(x)], \forall xP(x) \vdash \forall xQ(x)$	Generalizzazione 5
7.	$\forall x[P(x)\to Q(x)] \vdash \forall xP(x)\to\forall xQ(x)$	Deduzione
8.	$\vdash \forall x[P(x)\to Q(x)] \to [\forall xP(x)\to\forall xQ(x)]$	Deduzione

Si noti che, come nel caso proposizionale, quanto provato nell'esempio precedente può legittimamente trasformarsi in una nuova regola (derivata), spesso denominata ancora "generalizzazione":

$$\frac{\vdash A(x)\to B(x)}{\vdash \forall xA(x)\to\forall xB(x)}$$

Di nuovo, si può dimostrare che A è valida se e solo se c'è una sua dimostrazione nel sistema di Hilbert (scritto $\vdash_H$ A); ciò significa che il sistema di Hilbert è corretto e completo, come esprimono i teoremi seguenti.

Teorema (Correttezza del metodo deduttivo di Hilbert). Se $\vdash_H$ A allora $\models$ A.

Teorema (Completezza del metodo deduttivo di Hilbert). Se $\models$ A allora $\vdash_H$ A.

Il teorema di correttezza può essere dimostrato estendendo la prova del caso proposizionale con l'uso le interpretazioni insiemistiche al posto delle tavole di verità. Del teorema di completezza non diamo dimostrazione, dati i limiti di questo testo; chi è interessato può consultare Ben-Ari, 1998 o un altro manuale di logica. Il risultato può essere facilmente generalizzato considerando un particolare sistema di assunzioni (teoria), ottenendo

$$\Phi \models F \quad \text{se e soltanto se} \quad \Phi \vdash_H F$$