

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"  
 CORSO DI STUDI IN INFORMATICA  
 ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

LOGICA PROPOSIZIONALE

**Esercizio 1.** Utilizzando le tavole di verità mostra se sono giuste le seguenti conseguenze logiche:

- (1)  $A, A \rightarrow B \Vdash A \wedge B$
- (2)  $A, B \rightarrow A \Vdash A \wedge B$
- (3)  $(P \vee Q) \rightarrow R, Q \rightarrow P, Q \Vdash R$
- (4)  $(P \wedge Q) \rightarrow R, Q \rightarrow P, Q \Vdash R$
- (5)  $P \rightarrow Q, Q \Vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$
- (6)  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$
- (7)  $P \rightarrow Q, \neg Q \Vdash \neg P$
- (8)  $P \rightarrow Q, \neg Q \Vdash \neg P \rightarrow Q$
- (9)  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
- (10)  $P \wedge (Q \wedge R) \Vdash P \vee Q$
- (11)  $P \vee (Q \wedge R) \Vdash P \vee Q$
- (12)  $(L \wedge M) \rightarrow \neg P, I \rightarrow P, M, I \Vdash \neg L$
- (13)  $(L \wedge M) \rightarrow \neg P, L \rightarrow P, M, I \Vdash \neg L$
- (14)  $(L \wedge M) \rightarrow \neg P, L \rightarrow P, L, I \Vdash \neg L$
- (15)  $\Vdash P \rightarrow \neg P$
- (16)  $\Vdash P \vee \neg P$

Dai una dimostrazione in deduzione naturale dei casi che hai verificato essere conseguenze logiche.

**Soluzione.**

(1) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{A \quad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}}{A \wedge B}$$

(2) non è una conseguenza logica, difatti ponendo  $v(A) = 1, v(B) = 0$ , si rendono vere le ipotesi ma falsa la tesi

(3) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{Q}{P \vee Q} \quad (P \vee Q) \rightarrow R}{R}$$

(4) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{Q \quad Q \rightarrow P}{P} \quad Q}{\frac{P \wedge Q}{R} \quad (P \wedge Q) \rightarrow R}$$

(5) non è una conseguenza logica, difatti ponendo  $v(P) = 1, v(Q) = 1, v(R) = 0$ , si rendono vere le ipotesi ma falsa la tesi

(6) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad \frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad Q \rightarrow R}{R}}{Q \wedge R}}{P \rightarrow (Q \wedge R)}$$

(7) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad \neg Q}{\perp}}{\neg P}$$

(8) non è una conseguenza logica, tutte le valutazioni di verità che rendono vere le ipotesi rendono falsa la tesi

(9) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{[P] \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{Q \rightarrow R} \quad [Q]}{\frac{R}{P \rightarrow R}}}{Q \rightarrow (P \rightarrow R)}$$

(10) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{P \wedge (Q \wedge R)}{P}}{P \vee Q}$$

(11) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{P \vee (Q \wedge R) \quad \frac{[P] \quad \frac{[Q \wedge R]}{Q}}{P \vee Q}}{P \vee Q}}{P \vee Q}}$$

(12) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{I \rightarrow P \quad I}{P} \quad \frac{\frac{[L] \quad M}{L \wedge M} \quad (L \wedge M) \rightarrow \neg P}{\neg P}}{\perp}}{\neg L}$$

(13) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente:

$$\frac{\frac{L \rightarrow P \quad [L]}{P} \quad \frac{\frac{[L] \quad M}{L \wedge M} \quad (L \wedge M) \rightarrow \neg P}{\neg P}}{\perp}}{\neg L}$$

(14) non è una conseguenza logica, tutte le valutazioni di verità che rendono vere le ipotesi rendono falsa la tesi

(15) non è una conseguenza logica, infatti posto  $v(P) = 1$  otteniamo  $v(P \rightarrow \neg P) = 0$

(16) è una conseguenza logica, una dimostrazione è la seguente (utilizza la regola *RAA*):

$$\frac{\frac{[\neg(P \vee \neg P)]}{\frac{[P]}{P \vee \neg P}}{\perp}}{\frac{\perp}{P \vee \neg P}}{\frac{[\neg(P \vee \neg P)]}{\perp}}{\frac{\perp}{P \vee \neg P}}$$

□