UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA

ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

TEORIA DEGLI INSIEMI III: FUNZIONI E CARDINALITA'

FUNZIONI

Esercizio 1. *Indico con R l'insieme dei numeri reali. Determina se f e' una funzione da R in R quando:*

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$
(2) $f(x) = \sqrt{x}$
(3) $f(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$

Soluzione. *1) Non e' una funzione da R, perche' non e' definita per $x = -2, 2$.*
2) Non e' una funzione da R, perche' non e' definita per $x < 0$
3) Non e' una funzione perche' non associa ad un argomento un'unica immagine. □

Esercizio 2. *Siano $f : R \to R$ e $g : R \to R$ due funzioni definite come segue:*

(1) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$
(2) $f(x) = x^2 - 5x + 2$ e $g(x) = 2x + 3$

Calcolare $f \circ g$, $g \circ f$, f^2, g^2, dire quando sono iniettive, suriettive e biiettive.

Soluzione. *1) f non e' iniettiva (ex $f(1) = f(-1)$), ne' suriettiva (l'insieme delle immagini e' $[1, \infty)$), mentre g e' biiettiva. $f \circ g(x) = (x + 2)^2 + 1 = x^2 + 2x + 5$, $g \circ f(x) = x^2 + 3$, $f^2(x) = f \circ f(x) = (x^2+1)^2+1$, $g^2(x) = g \circ g(x) = x+4$. g^2 e' biiettiva, mentre tutte le altre composte non sono ne' iniettive ne' suriettive.*
2) simile al punto 1). □

Esercizio 3. *Indico con R^+ l'insieme dei reali strettamente maggiori di 0. Sia $f : R^+ \to R^+$, definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Dimostrare che f e' biiettiva e che $f^{-1} = f$.*

Soluzione. *f e' iniettiva, difatti siano $x_1, x_2 \in R^+$, tali che $f(x_1) = f(x_2)$, dimostro che $x_1 = x_2$. Per definizione di f, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, quindi (essendo $x_1, x_2 \neq 0$) $x_1 = x_2$.*

f e' suriettiva, difatti sia $y \in R^+$, dimostro che esiste un $x \in R^+$ tale che $f(x) = y$. E' sufficiente porre $x = \frac{1}{y}$ ed osservare che $\frac{1}{\frac{1}{y}} = y$.

$f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, dunque $f^{-1} = f$. □

Esercizio 4. *Sia $f : R \to R$ definita da:*
$f(x) = x^n$ *per* $-1 < x < 1$,
$f(x) = x$ *per gli altri valori reali di* x,
dire al variare del numero naturale n se f e' iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Soluzione. *Per n dispari f e' biiettiva, per n pari f non e' ne' iniettiva ne' suriettiva (quindi neppure biiettiva).* □

Date: 22 – 10 – 2006.

Esercizio 5. *Dati due insiemi qualsiasi* A, B*, indico con* $A \sim B$ *quando* A, B *sono equipotenti. Dimostra che i seguenti insiemi sono equipotenti con l'insieme dei numeri naturali:*

(1) l'insieme dei numeri interi $\mathbf{Z}$*;*
(2) l'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$.

Soluzione. *Guarda le dispense delle lezioni.* □

Esercizio 6 (Difficile)**.** *Scopo di questo esercizio e' dimostrare che l'insieme dei numeri reali* $\mathbf{R}$ *non e' equipotente a* $\mathbf{N}$.

(1) Dimostra che $\mathbf{R}$ *e' equipotente con il suo sottoinsieme* $[0,1) = \{x \in \mathbf{R} : \ 0 \leq x < 1\}$ *(Sugg. definisci una corrispondenza biunivoca tra* $\mathbf{R}$ *e* $[0,1)$ *sulla base della rappresentazione decimale dei loro elementi, osservando che gli elementi di* $[0,1)$ *si rappresentano come* $0, c_1c_2c_3c_4 \ldots$*).*
(2) Osserva che un qualsiasi elemento $x \in [0,1)$ *corrisponde a una sequenza infinita di cifre decimali, infatti:*

$$x = 0, c_1c_2c_3c_4 \ldots$$

Per ogni $i \in \mathbf{N}$*, indica con* x_i *l'*i*-sima cifra di tale successione.*

(3) Dimostra che per ogni funzione $f : \mathbf{N} \to [0,1)$ *esiste un elemento* $y \in [0,1)$ *che non e' nell'insieme delle immagini di* f*. (Sugg. definisci* $y \in [0,1)$ *tale che:*

$$y_i \neq f(i)_i$$

Dimostra che non esiste $x \in N$*, tale che* $f(x) = y$*).*

(4) Concludi che $[0,1)$ *non e' equipotente con* $\mathbf{N}$.
(5) Concludi che $\mathbf{R}$ *non e' equipotente con* $\mathbf{N}$.

Soluzione. *Guarda le dispense delle lezioni.* □

Esercizio 7. *Indico con* $A + B$ *l'unione disgiunta di* A *e* B*, ovvero* $A + B = A \times \{1\} + B \times \{2\}$*. Se* A, B *sono finiti ed hanno rispettivamente* n, m *elementi, allora:*

(1) quanti elementi ha $A + B$*?*
(2) quanti elementi ha $A \times B$*?*

Soluzione. *1)* $A + B$ *ha* $n + m$ *elementi. 2)* $A \times B$ *ha* nm *elementi.* □

Esercizio 8. *Siano* A, A', B, B' *quattro insiemi tali che* $A \sim A'$ *e* $B \sim B'$*, dimostra che:*

(1) $A + B \sim A' + B'$*;*
(2) $A \times B \sim A' \times B'$*;*

Soluzione. *1)Siano* A, A', B, B' *quattro insiemi tali che* $A \sim A'$ *e* $B \sim B'$*, dimostro che* $A + B \sim A' + B'$*. Siccome* $A \sim A'$*, esiste una biiezione* $f : A \to A'$*. Similmente esiste una biiezione* $g : B \to B'$*. Considero ora la seguente funzione:*

$$h(\langle x, i \rangle) = \begin{cases} \langle f(x), i \rangle & \text{se } i = 1 \\ \langle g(x), i \rangle & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

h e' una biiezione (dimostralo!) da $A + B$ *in* $A' + B'$*. Quindi* $A + B \sim A' + B'$.

2) Simile al punto 1). Siano A, A', B, B' *quattro insiemi tali che* $A \sim A'$ *e* $B \sim B'$*, dimostro che* $A \times B \sim A' \times B'$*. Siccome* $A \sim A'$*, esiste una biiezione* $f : A \to A'$*. Similmente esiste una biiezione* $g : B \to B'$*. Considero ora la seguente funzione:*

$$h(\langle a, b \rangle) = \langle f(a), g(b) \rangle$$

h e' una biiezione (dimostralo!) da $A \times B$ *a* $A' \times B'$*. Quindi* $A \times B \sim A' \times B'$*.* □

Esercizio 9. *L'esercizio 8 mostra che l'unione disgiunta e il prodotto cartesiano definiscono delle operazioni sulla classe degli insiemi quozientata dall'equipotenza $\sim$. Non solo, l'esercizio 7 mostra che nel caso A, B siano finiti, queste operazioni corrispondono alla somma e al prodotto sui numeri naturali. Questo porta a pensare che unione disgiunta e prodotto cartesiano possano generalizzare le operazioni di somma e prodotto agli insieme infiniti.*

(1) dimostra che unione disgiunta e prodotto cartesiano sono commutative e associative sulle classi di equivalenza di $\sim$;

(2) qual e' l'elemento neutro dell'unione disgiunta e quale del prodotto cartesiano viste come operazioni sulle classi di equivalenza di $\sim$? Quale e' l'elemento assorbente del prodotto cartesiano?

Soluzione.

Commutazione: *siano A, B due insiemi, dimostro che $A + B \sim B + A$ e che $A \times B \sim B \times A$. Considero le funzioni:*

$$f(\langle x, i\rangle) = \begin{cases} \langle x, 2\rangle & \textit{se } i = 1 \\ \langle x, 1\rangle & \textit{se } i = 2 \end{cases}$$

$$g(\langle a, b\rangle) = \langle b, a\rangle$$

f e' una biiezione (dimostralo!) da $A + B$ a $B + A$, mentre g e' una biiezione (dimostralo!) da $A \times B$ in $B \times A$, quindi $A + B \sim B + A$ e $A \times B \sim B \times A$.

Attento a non fare confusione: il prodotto cartesiano non e' commutativo sugli insiemi (ovvero $A \times B \neq B \times A$), ma e' commutativo sulle classi di equivalenza dell'equipotenza (ovvero $A \times B \sim B \times A$)

Associativita': *siano A, B, C tre insiemi, devi dimostrare che $A + (B + C) \sim (A + B) + C$ e che $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.*

Elementi neutri: *dato un insieme A, indico con $[A]$ la classe di equipotenza di A. L'elemento neutro di $+$ e' $[\emptyset] = \{\emptyset\}$, mentre l'elemento neutro di $\times$ e' $[\{\emptyset\}] = \{A \mid A \text{ singoletto}\}$.*

Elemento assorbente: *l'elemento assorbente di $\times$ e' $[\emptyset]$.* □