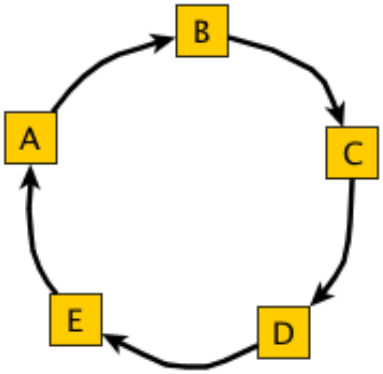
Progettazione di Algoritmi - lezione 3

Discussione dell'esercizio [ordine]

Rappresentiamo il problema con un grafo diretto G: i nodi sono le n lavorazioni $L_1, L_2, \ldots, L_n$, e tra due nodi L_h, L_k c'è un arco (L_h, L_k) se nella lista dei vincoli di L_k c'è L_h, cioè l'arco L_h --> L_k significa che L_h deve essere eseguita prima di L_k. Intuitivamente, un ordine fattibile di esecuzione delle lavorazioni esiste se e solo se G non ha cicli (diretti). Infatti se G ha un ciclo è impossibile rispettare tutti i vincoli dati dagli archi del ciclo.



Come nella figura qui sopra: *A* deve essere eseguita prima di *B* che deve essere eseguita prima di *C* che deve essere eseguita prima di *D* che deve essere eseguita prima di *E* che deve essere eseguita prima di *A*!

Supponiamo invece che G sia aciclico e osserviamo che vale la seguente proprietà:

Se un grafo è aciclico, esiste almeno un nodo che non ha archi entranti.

Se così non fosse potremmo partire da un nodo v_1 e prendere un suo arco entrante che esce da un nodo v_2, poi prendere un arco entrante in v_2 e uscente da un nodo v_3 diverso dai primi due perché il grafo è aciclico, anche v_3 ha un arco entrante che deve uscire, per le stesse ragioni, da un quarto nodo distinto v_4 e procedendo in questo modo si arriverebbe all'n-esimo nodo ma quest'ultimo ha un arco entrante che necessariamente dovrebbe uscire da uno dei nodi già considerati chiudendo un ciclo che non può esistere, contraddizione.

Grazie a questa proprietà posssiamo costruire un ordine come segue. Come primo nodo scegliamo un nodo v_1 senza archi entranti (cioè, una lavorazione senza vincoli). Eliminando v_1 dal grafo rimaniamo con un grafo aciclico e da questo scegliamo un nodo v_2 senza archi entranti (cioè, una lavorazione o senza vincoli o che aveva come unico vincolo v_1). Eliminiamo v_2 e otteniamo un grafo ancora aciclico e da questo scegliamo v_3 un nodo senza archi entranti (cioè, una lavorazione o senza vincoli o che aveva come vincoli solo v_1 o v_2). Possiamo procedere in questo modo fino all'ultimo nodo.

```
ORD(G: grafo diretto aciclico)
    L <- lista vuota
    WHILE  c'è almeno un nodo in G  DO
        trova un nodo v senza archi entranti e rimuovilo da G
        L.append(v)
    RETURN L
```

Chiaramente quest'ordine rispetta tutti i vincoli perché non ci possono essere archi da v_h a v_k con $k < h$, (cioè, archi con orientazione contraria all'ordinamento).

Un grafo diretto aciclico è anche chiamato brevemente *DAG* (da *Directed Acyclic Graph*). Un ordine dei nodi di un DAG che rispetta l'orientazione degli archi (cioè, se c'è un arco (u, v) allora u deve venire prima di v nell'ordine), si

chiama **ordine topologico** (*topological sort*). L'algoritmo precedente trova sempre un ordine topologico di un DAG ma l'implementazione immediata di tale algoritmo è piuttosto inefficiente. Infatti, richiede n passate e in ognuna deve trovare un nodo senza archi entranti e rimuoverlo. Ogni passata può richiedere tempo $O(n + m)$ e quindi il tempo totale potrebbe essere $O(n(n + m))$. Non è proprio banale rendere questo algoritmo efficiente. Fra poco vedremo invece un altro algoritmo che è efficiente ed è basato su alcune proprietà della DFS che saranno utili anche per altri problemi.

Proprietà della DFS

Come abbiamo già notato introducendo l'implementazione ricorsiva della DFS, quando un nuovo nodo w è visitato inizia una DFS da w. Questa struttura ricorsiva della DFS ha proprietà molto utili. Per iniziare a studiarle, assegniamo ad ogni nodo v due contatori:

- $t(v)$: il numero di nodi finora visitati (compreso v) quando inizia la DFS da v;
- $T(v)$: il numero di nodi finora visitati quando la DFS da v termina.

Si osservi che $t(v) \leq T(v)$ e $T(v) - t(v)$ è il numero di nuovi nodi visitati (escluso v) durante la DFS da v. Entrambi i contatori possono essere interpretati come tempi e infatti $t(v)$ è chiamato *tempo di inizio visita* di v e $T(v)$ *tempo di fine visita* di v. Dati due qualsiasi nodi v e w, o $t(v) < t(w)$ o $t(v) > t(w)$, cioè $t(v)$ e $t(w)$ non possono essere uguali. I nodi visitati possono quindi essere ordinati secondo i tempi di inizio visita: $1 = t(v_1) < t(v_2) < \dots$ dove v_i è l'i-esimo nodo visitato dalla DFS.

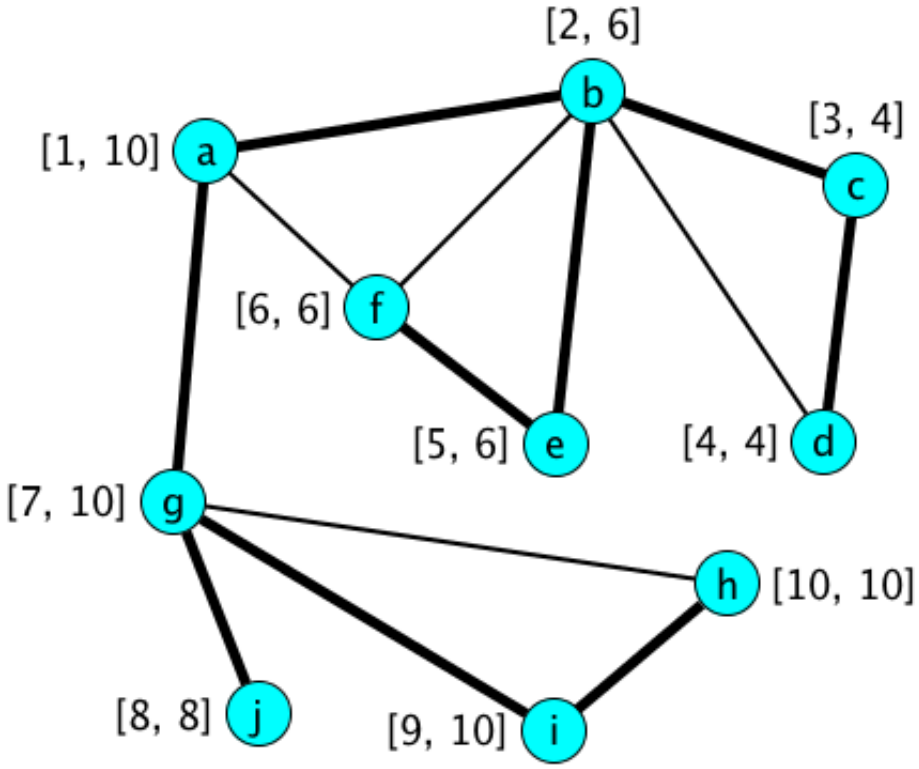
La struttura ricorsiva della DFS si evidenzia in modo particolare se consideriamo le relazioni tra gli intervalli $[t(v), T(v)]$. Infatti, per due nodi qualsiasi v e w o i loro intervalli sono disgiunti o uno è contenuto nell'altro. Per vederlo supponiamo che $t(v) < t(w)$, se gli intervalli $[t(v), T(v)]$ e $[t(w), T(w)]$ non sono disgiunti, allora $t(v) < t(w) \leq T(v)$. Questo significa che la DFS da w è iniziata quando la DFS da v non è ancora terminata, ne deriva che la DFS da v non può terminare prima che termini la DFS da w. Perciò, $T(w) \leq T(v)$ e l'intervallo di v contiene l'intervallo di w.

Per assegnare i tempi di inizio e fine visita basta modificare leggermente lo pseudo-codice della DFS:

```
TT <- array degli intervalli inizializzati con [0, 0]

DFS_TT(G: grafo, v: nodo, TT: array, c: intero)
    c <- c + 1
    TT[v].t <- c
    FOR ogni w adiacente di v DO
        IF TT[w].t = 0 THEN
            DFS_TT(G, w, TT, c)
    TT[v].T <- c
```

La chiamata iniziale sarà `DFS_TT(G, u, TT, 0)`. Nella figura qui sotto c'è un esempio (gli archi dell'albero di visita sono marcati):

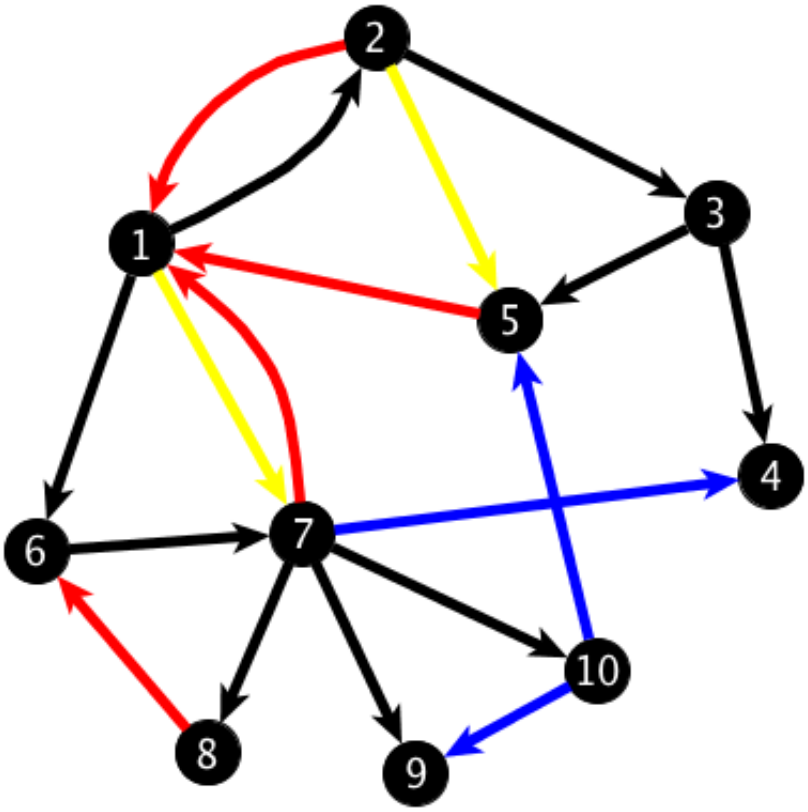


Classificazione degli archi in una DFS

Consideriamo un qualsiasi arco diretto (x, y) non appartenente all'albero della DFS. Per gli intervalli di visita di x e y sono possibili solamente i seguenti casi.

- Gli intervalli di x e y sono disgiunti: non può essere $t(x) < t(y)$ perchè l'arco (x, y) avrebbe forzato la visita di y durante la visita da x e i due intervalli non sarebbe stati disgiunti. Però può tranquillamente essere $t(y) < t(x)$, cioè l'arco (x, y) è tra due nodi che non hanno rapporti di discedenza e va da quello più giovane a quello più vecchio. Questo tipo di arco (che non può esistere in grafi non diretti) è detto **arco di attraversamento** (in inglese *cross edge*).
- L'intervallo di x è contenuto nell'intervallo di y: l'arco va da un nodo x a un suo antenato y ed è detto **arco all'indietro** (in inglese *back edge*). Questo tipo di arco esiste anche in grafi non diretti.
- L'intervallo di x contiene l'intervallo di y: l'arco va da un nodo x a un suo discendente y. Questo vuol dire che il nodo y è stato visitato durante la DFS da x ma seguendo un cammino diverso dal semplice arco (x, y). Questo tipo di arco è detto **arco in avanti** (in inglese *forward edge*). Per i grafi non diretti coincide con l'arco all'indietro.

Nella figura qui sotto i nodi sono numerati in ordine di visita, gli archi neri sono quelli dell'albero della DFS, quelli rossi sono archi all'indietro, quelli gialli sono archi in avanti e quelli blu sono archi di attraversamento.



Si noti che nei grafi non diretti possono esserci solamente due tipi di archi: gli archi dell'albero di visita e gli archi all'indietro.

Cicli

Se il grafo non è diretto (e connesso), la presenza di un qualsiasi arco all'indietro indica l'esistenza di un ciclo. E se non ci sono archi all'indietro il grafo è aciclico perchè coincide con l'albero della DFS.

Lo stesso vale per grafi diretti, cioè il grafo ha un ciclo se e solo se c'è almeno un arco all'indietro. Per vederlo supponiamo che u_0, u_1,…,u_k sia un ciclo (orientato e semplice) di G, quindi $u_0 = u_k$. Supponiamo, senza perdita di generalità, che u_0 sia il primo nodo del ciclo ad essere visitato dalla DFS. Siccome tutti gli altri nodi del ciclo saranno visitati durante la DFS da u_0, l'arco (u_{k-1}, u_0) è necessariamente un arco all'indietro. Dobbiamo ora far vedere che se c'è un arco all'indietro, c'è un ciclo. Sia (w, v) un arco all'indietro. Siccome v è un antenato di w, nell'albero della DFS c'è un cammino (orientato e semplice) che va da v a w e quindi l'arco (w, v) chiude tale cammino in un ciclo.

Vediamo nel dettaglio come determinare se un grafo G ha dei cicli e in caso affermativo trovare uno di questi. Nel caso di grafi non diretti, nel cercare un arco all'indietro da un certo nodo v bisogna prestare attenzione a non confonderlo con l'arco che collega v al genitore (cioè l'arco che ha permesso di scoprire v). Per recuperare il ciclo dopo averlo trovato possiamo memorizzare, durante la DFS, l'albero di visita. Per rappresentare un albero radicato (o una arborescenza) risulta spesso utile una semplice struttura chiamata **vettore dei padri** che consiste in un array di n elementi `P` tale che `P[v]` contiene il padre del nodo `v` nell'albero e se `u` è la radice `P[u] = u`. Assumiamo che i nodi siano identificati dagli interi da 1 a n. All'inizio della visita dal nodo `v`, per marcare che la visita è iniziata ma non ancora terminata, porremo `P[v] <- -u`, dove `u` è il padre di `v`. Quando la visita da `v` termina, porremo `P[v] <- u`. In questo modo, un arco che collega `v` a un suo adiacente `w` è un arco all'indietro se e solo se `P[w] < 0` e `w` non è il padre di `v` (quest'ultima condizione è necessaria solamente per grafi non diretti).

```
P: vettore dei padri inizializzato a 0

DFS_CYCLE(G: grafo, v: nodo, u: nodo, P: vettore dei padri)
    P[v] <- -u  /* Il valore negativo indica che la visita è iniziata ma non è terminata */
    FOR ogni adiacente w di v DO
        IF P[w] = 0 THEN
            z <- DFS_CYCLE(G, w, v, P)
            IF z <> 0 THEN      /* Un ciclo è già stato trovato */
                P[v] <- -P[v]
                RETURN z
        ELSE IF P[w] < 0 AND (G è diretto OR w <> u) THEN    /* Trovato ciclo */
            P[w] <- 0        /* Marca il primo nodo del ciclo */
            P[v] <- u
            RETURN v
    P[v] = u    /* La visita da u è terminata */
    RETURN 0    /* senza aver trovato un ciclo */
```

La chiamata sarà `DFS_CYCLE(G, u, u, P)`, dove `u` è un qualsiasi nodo. Se ritorna `0` significa che non ci sono cicli. Altrimenti, ritorna l'indice `v` dell'ultimo nodo del ciclo rispetto all'albero della DFS, mentre il primo nodo `w` è marcato con `P[w] = 0`. La lista dei nodi del ciclo si ottiene con il seguente codice:

```
w <- DFS_CYCLE(G, u, u, P)
L <- lista vuota
WHILE w > 0 DO
    L.append(w)
    w <- P[w]
RETURN L
```

Si osservi che l'algoritmo `DFS_CYCLE` non costa più della DFS. Inoltre, nel caso di un grafo non diretto, può essere molto più efficiente perché termina sempre in O(*n*). Infatti, se il grafo è aciclico la DFS stessa impiega O(*n*) perchè il grafo è un albero che ha solamente *n* - 1 archi. Se invece il grafo ha almeno un ciclo, l'algoritmo termina non appena trova un arco all'indietro. Al più saranno visitati tutti gli *n* - 2 archi dell'albero della DFS prima di incontrare un tale arco (dato che un qualsiasi arco o appartiene all'albero o è un arco all'indietro). Quindi il costo dell'algoritmo è O(*n*).

Ordine topologico

Effettuiamo una DFS su un DAG *G*. Se la DFS da *v* termina dopo la DFS da *w*, siamo certi che non ci può essere un arco da *w* a *v*. Infatti, se ci fosse sarebbe un arco all'indietro ma in un DAG non essendoci cicli non ci possono essere archi all'indietro. Allora possiamo ottenere un ordinamento topologico di un DAG semplicemente ordinando i nodi per tempi di fine visita decrescenti. Quindi, ogniqualvolta la DFS da un nodo *v* termina, inseriremo *v* in testa alla lista che mantiene l'ordine.

```
ORDTOP(G: DAG)
    L <- lista vuota
    VIS: array di bool, inizializzato a false
    FOR ogni nodo v di G DO
        IF NOT VIS[v] THEN
            DFS_ORD(G, v, VIS, L)
    RETURN L

DFS_ORD(G: DAG, v: nodo, VIS: array, L: lista)
    VIS[v] <- true
    FOR ogni adiacente w di v DO
        IF NOT VIS[w] THEN
           DFS_ORD(G, w, VIS, L)
    L.add_head(v)
```

Chiaramente l'algoritmo ha la stessa complessità della DFS e quindi O($n + m$).

Esercizio [gradi]

Il primo algoritmo `ORD` che abbiamo visto per l'ordinamento topologico può essere implementato in modo che abbia complessità O($n + m$). Assumendo che il DAG sia rappresentato tramite liste di adiacenza (cioè, per ogni nodo è data la lista degli adiacenti uscenti), descrivere una implementazione così efficiente dell'algoritmo.